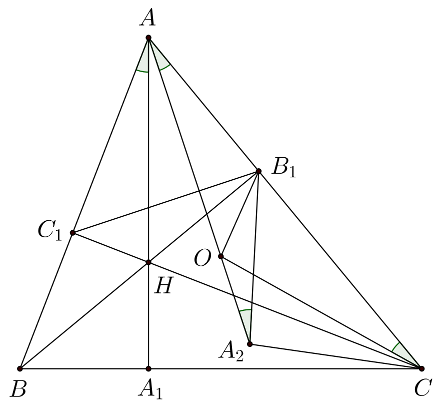
Al patrulea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 20 iunie 2016

Problema 1. Înălţimile AA_1, BB_1, CC_1 ale triunghiului ascuţitunghic ABC se intersectează în H. Fie A_2 simetricul lui A faţă de B_1C_1 şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
a) Demonstraţi că punctele O, A_2, B_1, C sunt conciclice.
b) Demonstraţi că punctele O, H, A_1, A_2 sunt conciclice.
Soluţia 1:
a) Unghiurile $\angle ABC$ şi $\angle AB_1C_1$ sunt congruente, deci la fel sunt şi complementarele lor, $\angle BAA_1$ şi $\angle A_2AC$. Rezultă că semidreptele $(AH$ şi $(AA_2$ sunt izogonale, deci $A_2 \in (AO$. Cum $AO = CO$, avem $\angle ACO \equiv \angle OAC \equiv \angle AA_2B_1$, deci punctele O, A_2, B_1, C sunt conciclice. (Argumentele funcţionează atât în cazul $A_2 \in (AO)$ cât şi în cazul $O \in (AA_2)$.)
b) Din puterea punctului A faţă de cercurile ce trec prin punctele O, A_2, B_1, C, respectiv H, A_1, C, B_1 rezultă $AB_1 \cdot AC = AO \cdot AA_2$, respectiv $AB_1 \cdot AC = AH \cdot AA_1$. Din $AO \cdot AA_2 = AH \cdot AA_1$, cu reciproca teoremei puterii punctului rezultă că punctele O, A_2, H, A_1 sunt conciclice.
Remarcă: Rezultatul rămâne valabil şi dacă triunghiul nu este ascuţitunghic.



Soluţia 2: pentru punctul b)
Fie O_1 mijlocul lui $[AH]$ (O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului AB_1C_1) şi $\{A_3\} = (AA_2 \cap B_1C_1$. Cum $[O_1A_3]$ este linie mijlocie în triunghiul AHA_2, avem că $\angle HA_2A \equiv \angle O_1A_3A$. Dar asemănarea triunghiurilor ABC şi AB_1C_1 implică egalitatea unghiurilor omoloage $\angle AA_1O$ şi $\angle AA_3O_1$, de unde $\angle AA_2H \equiv \angle AA_1O$ şi concluzia.

Problema 2. Fiind date trei culori şi un dreptunghi $m \times n$ împărţit în pătrate unitate, dorim să colorăm fiecare segment care constituie o latură a unui pătrat unitate cu una din cele trei culori astfel încât fiecare pătrat unitate să aibă două laturi de o culoare şi două laturi de o altă culoare. Câte asemenea colorări există?
Soluţie:
Numerotăm linile de sus în jos, de la stânga la dreapta. Latura din stânga a pătratului unitate aflat în colţul din stânga-sus poate fi colorată în 3 moduri. Sunt trei moduri de a alege cealaltă latură a acestui pătrăţel care va fi colorată cu aceeaşi culoare. Pentru laturile rămase avem două opţiuni (aceeaşi culoare pentru amândouă, una din cele două culori rămase). În total, sunt 18 colorări posibile.
Colorăm în continuare, succesiv, pătratele de pe prima linie, de la stânga la dreapta. De fiecare dată, latura din stânga este deja colorată, aşa încât pentru colorarea fiecărui asemenea pătrat avem câte 6 variante. La fel se întâmplă când colorăm, succesiv, pătratele de pe prima coloană, de sus în jos, începând de pe linia 2: avem câte 6 variante.
Trecem acum la colorarea fiecăruia din pătratele aflate pe liniile $2, 3, \ldots, m$ şi coloanele $2, 3, \ldots, n$. Facem colorarea de sus în jos, de la stânga la dreapta. Fiecare pătrat are deja latura din stânga şi cea de sus colorate. Dacă au culori diferite, laturile rămase trebuie să aibă exact aceste două culori, astfel că cele două laturi rămase pot fi colorate în două moduri. Dacă latura din stânga şi cea de sus au aceeaşi culoare, cele două laturi rămase trebuie colorate cu o aceeaşi culoare, culoare care poate fi aleasă în două moduri. Aşadar şi în acest caz sunt două variante de colorare.
În concluzie, sunt $18 \cdot 6^{m-1} \cdot 6^{n-1} \cdot 2^{(m-1)(n-1)} = 3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ colorări posibile.

Problema 3. Fie numerele reale a, b şi c astfel încât $a \geq b \geq 1 \geq c \geq 0$ şi $a + b + c = 3$.
a) Arătaţi că $2 \leq ab + bc + ca \leq 3$.
b) Demonstraţi inegalitatea $\dfrac{24}{a^3 + b^3 + c^3} + \dfrac{25}{ab + bc + ca} \geq 14$ şi precizaţi cazurile de egalitate.

Leonard Giugiuc

Soluţie: **a)** Notăm $ab+bc+ca = q$ şi $abc = p$. Din ipoteză, $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$, deci $q - 2 \geq p$; dar $p \geq 0$, de unde $q \geq 2$. Cum $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$, obţinem $q \leq 3$.
b) $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc = 3(9-3q+p)$; din punctul anterior, $p \leq q - 2 \Rightarrow 3(9 - 3q + p) \leq 3(7 - 2q) \Rightarrow \dfrac{24}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \dfrac{8}{7 - 2q}$. Este suficient să arătăm că $\dfrac{8}{7 - 2q} + \dfrac{25}{q} \geq 14$, ceea ce este echivalent cu $7(2q - 5)^2 \geq 0$, ceea ce este evident adevărat.

Din considerentele anterioare, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $p = q - 2$ şi $q = \frac{5}{2}$, $p = \frac{1}{2}$.
Dar $p = q - 2 \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) = 0$, deci cel puţin unul dintre numerele a, b, c este egal cu 1.
Notăm cu x şi y cele două numere rămase. Avem:

$$\begin{cases} x + y + xy = \dfrac{5}{2} \\ xy = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, obţinem că $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$ şi $c = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, E, F mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$, $\{G\} = AB \cap CD$, $\{H\} = AD \cap BC$. Arătaţi că:
a) punctele de intersecţie ale bisectoarelor unghiurilor $\angle AHB$ şi $\angle AGD$ cu laturile patrulaterului $ABCD$ sunt vârfurile unui romb;
b) centrul acestui romb se află pe dreapta EF.

prelucrare *Andrei Eckstein* şi *Mircea Fianu*

Soluţie: Vom considera cazul $C \in (GD)$ şi $C \in (BH)$, celelalte cazuri tratându-se analog.
a) Fie M şi N intersecţiile bisectoarei unghiului $\angle G$ cu laturile $[BC]$, respectiv $[AD]$ şi I, K intersecţiile bisectoarei unghiului $\angle H$ cu $[CD]$, respectiv $[AB]$. De asemenea, fie $\{J\} = MN \cap IK$. Avem $m(\angle G) = 180° - m(\angle GBC) - m(\angle GCB) = m(\angle B) + m(\angle C) - 180°$, deci $m(\angle CMJ) = 90° + \frac{1}{2}(m(\angle B) - m(\angle C))$. Analog, $m(\angle CIJ) = 90° + \frac{1}{2}(m(\angle D) - m(\angle C))$. Din patrulaterul $CMJI$, folosind că $m(\angle B) + m(\angle D) = 180°$, rezultă că $m(\angle MJI) = 90°$.
În triunghiurile GIK şi HMN, segmentele $[GJ]$ respectiv $[HJ]$ sunt bisectoare şi înălţimi, deci sunt şi mediane, prin urmare diagonalele patrulaterului $MKNI$ sunt perpendiculare şi se înjumătăţesc.
b) Laturile rombului sunt paralele cu diagonalele AC, respectiv BD. Într-adevăr, din teorema bisectoarei, $\frac{MB}{MC} = \frac{GB}{GC}$ şi $\frac{BK}{KA} = \frac{HB}{HA}$. Dar, din puterea punctului G faţă de cerc, $\frac{GB}{GC} = \frac{GD}{GA}$. Pentru a arăta că $MK \parallel AC$, adică $\frac{BK}{KA} = \frac{BM}{MC}$, este suficient să demonstrăm că $HA \cdot GD = HB \cdot GA$. Acest lucru rezultă din $\sigma_{[AHG]} = \frac{HA \cdot GD \sin D}{2} = \frac{HB \cdot GA \sin B}{2}$ şi $\sin B = \sin D$. Aşadar, $MK \parallel AC$. Analog celelalte.

Fie $\{L\} = MK \cap BF$, $\{P\} = AE \cap KN$, $\{O\} = DF \cap IN$ şi $\{Q\} = MI \cap CE$. Segmentele AE, BF, CE şi DF sunt mediane în triunghiurile ABD, ABC, BCD, CDA, deci segmentele LO şi PQ sunt bimediane ale rombului descris (adică unesc mijloacele a câte două laturi opuse). Ca urmare LO şi PQ sunt concurente în centrul rombului.
Fie $\{X\} = LO \cap EF$ şi $\{Y\} = QP \cap EF$. Avem $\dfrac{XE}{XF} = \dfrac{LB}{LF} = \dfrac{BK}{KA}$ şi $\dfrac{YE}{YF} = \dfrac{QE}{QC} = \dfrac{BM}{MC}$. Cum $\dfrac{BK}{KA} = \dfrac{BM}{MC}$, rezultă că $X = Y$, deci dreptele EF, LO şi PQ sunt concurente în centrul rombului.