Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale
şi Cercetării Ştiinţifice

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 13 mai 2016

Problema 1. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră sistemul

$$(S_n): \begin{cases} x^2 + ny^2 = z^2 \\ nx^2 + y^2 = t^2 \end{cases}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $M_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{sistemul } (S_n) \text{ are o infinitate de soluţii}\}$, iar $M_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{sistemul } (S_n) \text{ nu are soluţii}\}$, demonstraţi că:
a) $7 \in M_1$, $10 \in M_2$,
b) mulţimile M_1 şi M_2 sunt infinite.

Soluţie.
a) Se observă că $x = 1, y = 3, z = 8, t = 4$ este soluţie a sistemului (S_7), deci şi $(k, 3k, 8k, 4k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ sunt soluţii, deci $7 \in M_1$.
Dacă (x, y, z, t) ar fi o soluţie a sistemului (S_{10}), ar rezulta că $11(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$. Din $11 \mid z^2 + t^2$ rezultă că $11 \mid z$ şi $11 \mid t$. Atunci $11 \mid x^2 + y^2$, deci $11 \mid x$ şi $11 \mid y$. Aşadar, există $x_1, y_1, z_1, t_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x = 11x_1$, $y = 11y_1$, $z = 11z_1$, $t = 11t_1$. Rezultă că $11(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 + t_1^2$. Continuând procedeul (de descreştere infinită), găsim că x se divide cu orice putere a lui 11 şi, cum $x \neq 0$, obţinem o contradicţie. Aşadar sistemul (S_{10}) nu are soluţii, adică $10 \in M_2$.
b) Este uşor de văzut că orice număr natural de forma $m^2 - 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, este în M_1: putem alege $x = y$ şi constata că (k, k, mk, mk), $k \in \mathbb{N}^*$, sunt soluţii ale sistemului (S_{m^2-1}), deci $m^2 - 1 \in M_1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$.
Raţionamentul făcut la punctul a) pentru $n = 10$ funcţionează pentru orice număr $n = p - 1$, unde p este un număr prim de forma $4m + 3$. Toate aceste numere sunt în M_2 şi, cum există o infinitate de numere prime de forma $4m + 3$, rezultă concluzia.

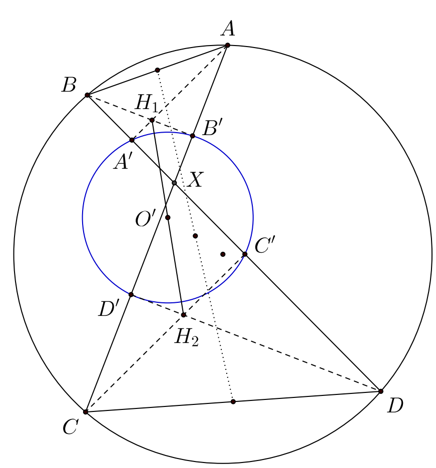
Problema 2. Fie x şi y numere reale nenule, astfel încât $x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3$. Determinaţi valorile pe care le poate lua expresia $E = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Soluţie.
Relaţia din enunţ se rescrie succesiv $(x+y)^3 - 3xy(x+y) = x^3y^3 - 3x^2y^2$, adică $(x+y)^3 - (xy)^3 = 3xy(x+y) - 3x^2y^2$, deci $(x+y-xy)(x^2+2xy+y^2+x^2y+xy^2+x^2y^2) = 3xy(x+y-xy)$. Atunci avem că fie $x+y = xy$, adică $E = 1$, fie $x^2+2xy+y^2+x^2y+xy^2+x^2y^2 = 3xy$. Ultima egalitate, înmulţită cu 2, se scrie echivalent $x^2(y+1)^2 + y^2(x+1)^2 + (x-y)^2 = 0$, relaţie posibilă numai dacă $x = y = -1$ ($x = y = 0$ nu convine). În acest caz, $E = -2$. Prin urmare, mulţimea valorilor posibile ale lui E este inclusă în mulţimea $\{-2, 1\}$. Ambele valori se ating, de exemplu pentru $x = y = 2$, respectiv $x = y = -1$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, în care diagonalele se intersectează în X şi nu sunt perpendiculare. Fie A', C' proiecţiile lui A şi C pe BD şi B', D'

proiecţiile lui B şi D pe AC. Arătaţi că:
a) perpendicularele duse din mijloacele laturilor pe latura opusă sunt concurente într-un punct M, numit *punctul lui Mathot*;
b) punctele A', B', C', D' sunt conciclice;
c) dacă O' este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, atunci O' este mijlocul segmentului determinat de ortocentrele triunghiurilor XAB şi XCD;
d) O' este punctul lui Mathot al patrulaterului $ABCD$.
Soluţie.

a) Fie O centrul cercului circumscris lui $ABCD$. Se ştie că mijloacele laturilor lui $ABCD$ sunt vârfurile unui paralelogram, deci segmentele care unesc mijloacele a două laturi opuse au acelaşi mijloc, G. Perpendicularele din O pe AB şi CD cad în mijloacele acestor laturi, astfel că perpendicularele duse din mijloace, respectiv din O, pe două laturi opuse formează un paralelogram al cărui centru este G. Rezultă că cele două perpendiculare duse din mijloacele a două laturi opuse pe laturile opuse lor se intersectează în simetricul lui O faţă de G. Tot acolo se intersectează şi celelalte două perpendiculare.
b) Vom presupune unghiul AXB ascuţit, celălalt caz fiind analog.
Patrulaterele $ABA'B'$, $CDC'D'$ şi $ABCD$ fiind inscriptibile, avem
$\angle XD'C' \equiv \angle XDC \equiv \angle XAB \equiv \angle XA'B'$, deci $A'B'C'D'$ este inscriptibil.
c) Fie H_1 şi H_2 ortocentrele triunghiurilor XAB, respectiv XCD. Dacă O'' este mijlocul lui $[H_1H_2]$, cum O'' aparţine liniei mijlocii a trapezului $H_1B'H_2D'$, O'' aparţine mediatoarei segmentului $[B'D']$. Analog, O'' aparţine liniei mijlocii a trapezului $A'H_1C'H_2$, deci mediatoarei lui $[A'C']$. Cum $A'C'$ şi $B'D'$ nu sunt paralele, rezultă că O'' este tocmai centrul cercului circumscris lui $A'B'C'D'$, adică O'' coincide cu O'.
d) Avem că $\angle A'B'X \equiv \angle ABX \equiv \angle DCX$, deci $A'B' \parallel CD$. Dacă N este mijlocul lui $[AB]$, atunci $NA' = NB'$ (mediane în triunghiuri dreptunghice), deci N aparţine mediatoarei lui $[A'B']$. Cum şi O' aparţine acesteia, rezultă că $NO' \perp CD$. Analog se arată că O' aparţine perpendicularei duse din mijlocul lui $[CD]$ pe AB, deci O' este chiar punctul lui Mathot al patrulaterului.



Problema 4. În pătrăţelele unitate ale unei table $n \times n$ se scriu n^2 numere naturale cu suma S. O mutare constă din alegerea unui pătrat 2×2 şi mărirea cu o unitate a exact trei dintre cele patru numere din respectivul pătrat.
Spunem că numărul natural n este *bun* dacă, pentru orice S, există o succesiune de mutări care face numerele de pe tablă egale.
a) Arătaţi că $n = 6$ nu este bun.
b) Demonstraţi că numerele 4 şi 1024 sunt bune.

Soluţie.
a) Observăm că la orice mutare suma celor 36 de numere creşte cu 3. Cum suma finală trebuie să fie un multiplu de 36, deci de 3, constatăm că dacă suma iniţială S nu era divizibilă cu 3 atunci sigur nu se poate ajunge la configuraţia cu toate numerele de pe tablă egale. Prin urmare 6 (şi la fel se arată pentru orice multiplu de 3) nu este bun.
b) Alegem un număr dintr-un pătrăţel oarecare. Se pot mări celelalte 15 numere cu o unitate. De exemplu, dacă numărul ales este în pătratul 2×2 din stânga sus, mărim succesiv numerele din pătrăţelele notate cu B, apoi numerele din pătrăţelele notate cu C, D şi E. În final mărim numerele din 3 din cele 4 pătrăţele notate cu A (cu excepţia celui ales).

A	A	B	B
A	A	C	B
D	C	C	E
D	D	E	E

Combinând 5 mutări, am obţinut o nouă mutare care de fapt este echivalentă cu micşorarea numărului ales cu o unitate.
Aplicând repetat noua mutare şi alegând de fiecare dată un număr de valoare maximă numerele vor deveni egale.
Vom arăta prin inducţie după $m \in \mathbb{N}$ că pentru orice număr de forma 2^m, $m \geq 1$, tabla $2^m \times 2^m$ din care lipseşte un pătrăţel oarecare poate fi pavată cu trominouri (figuri formate prin îndepărtarea dintr-un pătrat 2×2 a unui pătrat 1×1).
Verificarea pentru $m = 1$ este evidentă.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru $n = 2^m$, o vom demonstra pentru $n = 2^{m+1}$.
Împărţim pătratul în patru sferturi, adică în 4 pătrate $2^m \times 2^m$. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că pătrăţelul lipsă se află în sfertul din stânga sus. Restul pătratului $2^m \times 2^m$ care formează sfertul din stânga sus îl putem pava cu trominouri (conform ipotezei de inducţie). Din celelalte trei sferturi $2^m \times 2^m$ îndepărtăm pătrăţelul care se află în centrul 2×2 al tablei mari, $2^{m+1} \times 2^{m+1}$. Conform ipotezei de inducţie, fiecare din cele trei sferturi, privat de colţul central, poate fi pavat cu trominouri. În fine, cele trei pătrăţele unitare centrale care au fost îndepărtate pot fi şi ele acoperite cu un trominou. Inducţia este astfel încheiată.

Pentru orice pătrăţel vom compune din repetarea mutării din enunţ o ,,mutare-atom" care măreşte cu 1 numerele din fiecare pătrăţel al tablei cu excepţia celui ales. Aplicând în mod repetat această ,,mutare-atom" asupra unuia din numerele cu valoare maximă de pe tablă se va ajunge ca toate numerele de pe tablă să fie egale.