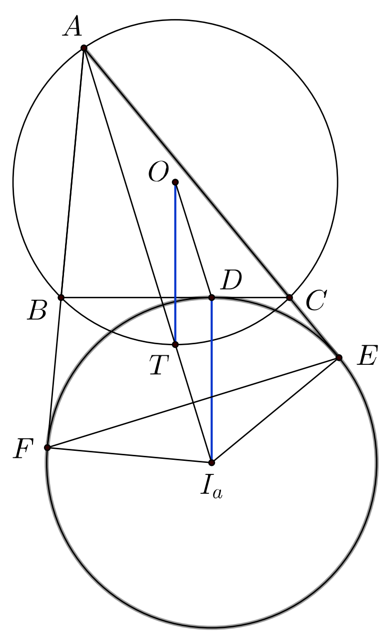
Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale
şi Cercetării Ştiinţifice

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 11 mai 2016

Problema 1. Triunghiul ABC, înscris în cercul cu centrul în O şi rază R, are proprietatea că raza cercului A-exînscris este egală cu R. Dacă D, E, F sunt punctele de contact ale cercului A-exînscris cu dreptele BC, CA, respectiv AB, demonstraţi că dreptele OD şi EF sunt perpendiculare.

Soluţie. Fie T mijlocul arcului BC de pe cercul circumscris lui ABC care nu conţine punctul A. Fie I_a centrul cercului A-exînscris. Atunci OT este mediatoarea segmentului $[BC]$, deci $OT \perp BC$ şi $I_aD \perp BC$. De asemenea, $OT = I_aD = R$, deci ODI_aT este un paralelogram. Rezultă că $OD \parallel TI_a$, sau $OD \parallel AI_a$. Dar $AE = AF$ şi (AI_a este bisectoarea unghiului $\angle FAE$, deci $AI_a \perp EF$. Prin urmare, $OD \perp EF$.



Problema 2. Fie $a, b, c > 0$ cu $abc \geq 1$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a^3+2b^3+6}+\frac{1}{b^3+2c^3+6}+\frac{1}{c^3+2a^3+6} \leq \frac{1}{3}.$$

Ionuţ Grigore

Soluţia 1. Folosind că $a^3+b^3+1\geq 3ab$ şi $b^3+1+1\geq 3b$ obţinem că $\dfrac{1}{a^3+2b^3+6}\leq\dfrac{1}{3ab+3b+3}$, deci este suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\leq 1.$$

Dar $\dfrac{1}{ab+b+1}+\dfrac{1}{bc+c+1}+\dfrac{1}{ca+a+1}=$

$$\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab^2c+abc+ab}+\frac{b}{abc+ab+b}$$

$$\overset{abc\geq 1}{\leq}\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{1+ab+b}=\frac{1+ab+b}{ab+b+1}=1.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Soluţia 2. Scădem $\dfrac{1}{6}$ din fiecare fracţie din membrul stâng.

Inegalitatea se scrie succesiv $\displaystyle\sum_{cycl}\left(\frac{1}{a^3+2b^3+6}-\frac{1}{6}\right)\leq\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$,

$\displaystyle\sum_{cycl}\frac{-a^3-2b^3}{6(a^3+2b^3+6)}\leq-\frac{1}{6}$, $\displaystyle\sum_{cycl}\frac{a^3+2b^3}{a^3+2b^3+6}\geq 1$.

Vom demonstra că $\displaystyle\sum_{cycl}\frac{a^3}{a^3+2b^3+6}\geq\frac{1}{3}$ şi $\displaystyle\sum_{cycl}\frac{b^3}{a^3+2b^3+6}\geq\frac{1}{3}$ care, combinate, vor implica inegalitatea de demonstrat.

Avem $\displaystyle\sum_{cycl}\frac{a^3}{a^3+2b^3+6}=\sum_{cycl}\frac{a^4}{a^4+2ab^3+6a}\overset{CBS}{\geq}$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+2(ab^3+bc^3+ca^3)+6(a+b+c)}\overset{?}{\geq}\frac{1}{3}.$$

Ori (?) $\Leftrightarrow 3(a^4+b^4+c^4)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq a^4+b^4+c^4+2(ab^3+bc^3+ca^3)+6(a+b+c)$ care rezultă din $2(a^4+b^4+c^4)\geq 2(ab^3+bc^3+ca^3)$ (imediată din inegalitatea rearanjamentelor) şi $6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 6(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)=6abc(a+b+c)\geq 6(a+b+c)$.

Avem $\displaystyle\sum_{cycl}\frac{b^3}{a^3+2b^3+6}=\sum_{cycl}\frac{b^4}{ba^3+2b^4+6b}\overset{CBS}{\geq}$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^4+b^4+c^4)+(ba^3+cb^3+ac^3)+6(a+b+c)}\overset{?}{\geq}\frac{1}{3}.$$

Ori (?) $\Leftrightarrow 3(a^4+b^4+c^4)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 2(a^4+b^4+c^4)+(ba^3+cb^3+ac^3)+6(a+b+c)$ care rezultă din $a^4+b^4+c^4\geq ba^3+cb^3+ac^3$ (imediată din inegalitatea rearanjamentelor) şi $6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 6(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)=6abc(a+b+c)\geq 6(a+b+c)$.

Soluţia 3. Folosind că $a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2$ şi analoagele, este suficient să demonstrăm că $\dfrac{1}{ab^2+2} + \dfrac{1}{bc^2+2} + \dfrac{1}{ca^2+2} \leq 1$.

Scăzând $\dfrac{1}{2}$ din fiecare din fracţiile din membrul stâng, inegalitatea revine la

$$-\frac{ab^2}{2(ab^2+2)} - \frac{bc^2}{2(bc^2+2)} - \frac{ca^2}{2(ca^2+2)} \leq 1 - \frac{3}{2},$$

adică la

$$\frac{ab^2}{ab^2+2} + \frac{bc^2}{bc^2+2} + \frac{ca^2}{ca^2+2} \geq 1.$$

Folosind că $abc \geq 1$, este suficient atunci să arătăm că

$$\frac{ab^2}{ab^2+2abc} + \frac{bc^2}{bc^2+2abc} + \frac{ca^2}{ca^2+2abc} \geq 1,$$

adică

$$\frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} + \frac{a}{a+2b} \geq 1.$$

Dar $\dfrac{b}{b+2c} + \dfrac{c}{c+2a} + \dfrac{a}{a+2b} = \dfrac{b^2}{b^2+2bc} + \dfrac{c^2}{c^2+2ca} + \dfrac{a^2}{a^2+2ab} \overset{CBS}{\geq}$
$\dfrac{(a+b+c)^2}{b^2+2bc+c^2+2ca+a^2+2ab} = 1.$
Egalitatea are loc dacă $a = b = c = 1$.

Problema 3. Fie n un număr natural, $n \geq 3$, şi $A = \{2^n - 1, 3^n - 1, \ldots, (n-1)^n - 1\}$. Dacă niciunul din elementele lui A nu este divizibil cu n, arătaţi c'a n este liber de pătrate. Este n neapărat prim?

Marius Bocanu

Soluţie. Dacă niciunul din elementele lui A nu este divizibil cu n, vom arăta că n este liber de pătrate. Presupunem că nu e cazul şi atunci $n = p \cdot a$ cu p prim şi $a > 1, p \mid a$. Arătăm că $n \mid (a+1)^n - 1 = a \cdot \big((a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-2} + \ldots + 1\big)$. Cum $a + 1 \equiv 1 \ (mod\ p)$, rezultă $(a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-2} + \ldots + 1 \equiv n \equiv 0 \ (mod\ p)$.

Nu rezultă că n este prim. De exemplu, pentru $n = 3 \cdot 5$, niciunul din elementele lui A nu este divizibil cu 15. Elementele din A corespunzătoare numerelor divizibile cu 3 sau 5 evident nu verifică, iar cele corespunzătoare elementelor congruente cu 2 (mod 3) nu verifică deoarece ridicate la puteri impare rămân congruente cu 2 (mod 3) şi tot ce rămâne de verificat e că $4^{15} - 1,\ 7^{15} - 1,\ 13^{15} - 1$ nu sunt divizibile cu 5 care este imediat.

Remarcă.
Evident, orice număr prim n are proprietatea din enunţ. Dar $n = 15$ arată că nu doar

numerele prime au proprietatea din enunţ. Problema arată că numai numere libere de pătrate au proprietatea din enunţ. În fine, $n = 6$ arată că nu toate numerele libere de pătrate au proprietatea din enunţ.

Problema 4. Iniţial, pătratele unitate ale unei table 4×4 sunt vopsite în alb. O mutare constă din alegerea unui dreptunghi format din 3 pătrate unitate şi din schimbarea culorii fiecăruia din cele trei pătrate din alb în negru sau din negru în alb. Este posibil ca prin efectuarea mai multor mutări să facem toată tabla neagră?

Olimpiadă Cuba, 2003

Soluţie.
Completăm pătratele unitare cu câte unul din numerele 1, 2, 3 astfel:

1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
1	2	3	1

Orice dreptunghi format din trei pătrate unitate conţine câte un pătrat de fiecare fel, astfel că fiecare mutare va viza exact un pătrat de fiecare fel. Iniţial avem 6 pătrate albe cu numărul 1, 5 pătrate albe cu numărul 2 şi 5 pătrate albe cu numărul 3, adică în total 11 pătrate albe pe care scrie 1 sau 2. O mutare nu schimbă paritatea numărului total de pătrate albe care au etichete 1 sau 2, deci nu se poate ajunge la poziţia în care, în total, să avem 0 pătrate albe cu etichete 1 sau 2.
Aşadar răspunsul este negativ.