Societatea de Ştiinţe Matematice din România Ministerul Educaţiei Naţionale

Al cincilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 28 mai 2015

Problema 1. Arătaţi că numărul 1 se poate reprezenta ca suma unui număr finit n de numere reale subunitare, nu neapărat distincte, care folosesc în scrierea lor zecimală numai cifrele 0 şi/sau 7. Care este cel mai mic astfel de număr n?

Problema 2. Doi jucători, A şi B, iau alternativ pietre dintr-o grămadă cu $n \geq 2$ pietre. Primul mută A care ia cel puţin o piatră şi cel mult $n - 1$ pietre. În continuare, fiecare jucător aflat la mutare trebuie să ia minim o piatră şi cel mult atâtea pietre câte a luat adversarul său la precedenta mutare. Câştigă jucătorul care ia ultima piatră. Care jucător are strategie câştigătoare?

Problema 3. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 1$, atunci

$$\frac{bc + a + 1}{a^2 + 1} + \frac{ca + b + 1}{b^2 + 1} + \frac{ab + c + 1}{c^2 + 1} \leq \frac{39}{10}\,.$$

Problema 4. Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul ω şi punctul P în interiorul său. Dreptele AP, BP, respectiv CP intersectează a doua oară cercul ω în punctele D, E, respectiv F. Dacă A', B', C' sunt simetricele punctelor A, B, C faţă de dreptele EF, FD, respectiv DE, arătaţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Al cincilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 28 mai 2015
Soluţii

Problema 1. Arătaţi că numărul 1 se poate reprezenta ca suma unui număr finit n de numere reale subunitare, nu neapărat distincte, care folosesc în scrierea lor zecimală numai cifrele 0 şi/sau 7. Care este cel mai mic astfel de număr n?

prelucrare *Dan Schwarz*

Soluţie. Avem $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, care trebuie reprezentat ca suma unui număr finit n de numere reale subunitare, nu neapărat distincte, care folosesc în scrierea lor zecimală numai cifrele 0 şi/sau 1. Se vede atunci că trebuie $n \geq 8$; un exemplu pentru $n = 8$ este

$$1=0,\overline{777777}+0,\overline{077777}+0,\overline{070777}+0,\overline{070777}+0,\overline{000777}+0,\overline{000707}+0,\overline{000707}+0,\overline{000700},$$

adică

$$1 = \frac{777777}{10^6-1} + \frac{77777}{10^6-1} + \frac{70777}{10^6-1} + \frac{70777}{10^6-1} + \frac{777}{10^6-1} + \frac{707}{10^6-1} + \frac{707}{10^6-1} + \frac{700}{10^6-1}.$$

Desigur, există şi alte, infinit de multe, reprezentări pentru $n = 8$, ca şi pentru valori $n > 8$.

Problema 2. Doi jucători, A şi B, iau alternativ pietre dintr-o grămadă cu $n \geq 2$ pietre. Primul mută A care ia cel puţin o piatră şi cel mult $n-1$ pietre. În continuare, fiecare jucător aflat la mutare trebuie să ia minim o piatră şi cel mult atâtea pietre câte a luat adversarul său la precedenta mutare. Câştigă jucătorul care ia ultima piatră. Care jucător are strategie câştigătoare?

Olimpiadă Bulgaria, 1996

Soluţie: Să definim poziţia (a, b) ca însemnând ,,cel care urmează la mutare găseşte pe masă a pietre şi are voie să ia cel mult b pietre”.
Vom demonstra că poziţiile pierzătoare sunt cele de formele $(0, r)$ şi $\big(2^k(2m+1), r\big)$, unde $k, m \in \mathbb{N},\ r \in \{1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$.
Deoarece poziţia iniţială este $(n, n-1)$, poziţiile iniţiale pierzătoare sunt cele cu $m = 0$, adică puterile lui 2. Concluzia va fi că dacă n este putere a lui 2 câştigă al doilea jucător, în celelalte cazuri câştigând primul.
Să observăm că:
- jocul se termină numai prin poziţii de forma $(0, r)$

- dintr-o poziţie de forma $\big(2^k(2m+1),r\big)$, $0<r<2^k$, nu există nicio mutare care să lase adversarul într-o poziţie de aceeaşi formă
- din orice poziţie care nu este de forma de mai sus există mutare care să îl lase pe adversar într-o poziţie de forma $\big(2^k(2m+1),r\big)$, $0<r<2^k$.
• Dacă dintr-o poziţie de forma $\big(2^k(2m+1),r\big)$, $0<r<2^k$, s-ar putea ajunge la $\big(2^s(2p+1),t\big)$, $0<t<2^s$, acea mutare ar consta din luarea a t pietre, deci $2^k(2m+1)-2^s(2p+1)=t$. Cum $t\le r<2^k$, rezultă că $s<k$, deci $2^s \mid 2^k(2m+1)-2^s(2p+1)$. Aşadar $2^s \mid t$, ceea ce contrazice $0<t<2^s$. În concluzie, nu există o asemenea mutare.
Evident, nici în poziţii final, $(0,x)$, nu se poate muta.
• Din orice poziţie rămasă, adică $\big(2^k(2m+1),r\big)$ cu $r\ge 2^k$ există mutare care să îl lase pe adversar în poziţia $\big(2^k\cdot 2m,2^k\big)$, evident pierzătoare. Pur şi simplu trebuie luate 2^k pietre din grămadă.
De aici se vede şi strategia câştigătoare pentru jucătorul care are o asemenea strategie: scoate mereu din grămadă 2^k pietre unde 2^k este cea mai mare putere a lui 2 care divide numărul de pietre din grămadă.

Problema 3. Arătaţi că dacă $a,b,c>0$ şi $a+b+c=1$, atunci
$$\frac{bc+a+1}{a^2+1}+\frac{ca+b+1}{b^2+1}+\frac{ab+c+1}{c^2+1}\le\frac{39}{10}\,.$$

Lucian Petrescu

Soluţie:
Din $a+b+c=1$ obţinem $a-a^2=ab+ca$ şi analoagele; deci inegalitatea de demonstrat devine echivalentă succesiv cu:
$$\sum_{cyc}\left(\frac{bc+a+1}{a^2+1}-1\right)\le\frac{9}{10}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{a^2+1}\le\frac{9}{10}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}ab\right)\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+1}\right)\le\frac{9}{10}\,.$$
Deoarece
$$\sum_{cyc}ab\le\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc}a\right)^2=\frac{1}{3}\,,$$
pentru a demonstra ultima inegalitate, este suficient să arătăm că
$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+1}\le\frac{27}{10}\Leftrightarrow 27(abc)^2+17\sum_{cyc}(ab)^2+7\sum_{cyc}a^2\ge 3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 27(abc)^2-34abc+17\left(\sum_{cyc}ab\right)^2-14\sum_{cyc}ab+4\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 17(17-27abc)^2 + 27\left(7-17\sum_{cyc} ab\right)^2 \geq 4400 \,.$$

Ultima inegalitate este adevărată, întrucât

$$\sum_{cyc} ab \leq \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc} a\right)^2 = \frac{1}{3} \quad \text{şi} \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}\,,$$

de unde rezultă că

$$17(17-27abc)^2 \geq 4352 \quad \text{şi} \quad 27\left(7-17\sum_{cyc} ab\right)^2 \geq 48.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Altă finalizare: Inegalitatea

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+1} \leq \frac{27}{10} \qquad (*)$$

poate fi demonstrată şi astfel: se arată mai întâi că $\dfrac{1}{a^2+1} \leq \dfrac{54-27a}{50}$, inegalitate care este echivalentă cu $\left(a-\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}-a\right) \geq 0$. Apoi, adunând cu inegalităţile analoage scrise pentru b şi c, obţinem inegalitatea dorită.

Cum se poate găsi o asemenea majorare? Condiţia din enunţ, $a+b+c=1$, precum şi faptul că inegalitatea pe care vrem să o demonstrăm se scrie $f(a)+f(b)+f(c) \leq \dfrac{27}{10}$, unde $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, ne sugerează să căutăm o majorare de tipul $f(x) \leq mx+n$, $\forall\, x \in (0,1)$. Observând că în inegalitatea $(*)$ avem egalitate dacă $a = b = c = \dfrac{1}{3}$, trebuie să avem egalitate pentru $x = \dfrac{1}{3}$ în inegalitatea $1 \leq (x^2+1)(mx+n)$. Trebuie deci ca $m+3n = \dfrac{27}{10}$. Atunci inegalitatea precedentă se scrie $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(mx^2+\left(\dfrac{m}{3}+n\right)x+\dfrac{10m}{9}+\dfrac{n}{3}\right) \geq 0$, $\forall\, x \in (0,1)$. Pentru ca expresia din stânga să nu îşi schimbe semnul în $\dfrac{1}{3}$ este necesar ca $x = \dfrac{1}{3}$ să fie rădăcină şi pentru polinomul de gradul II din paranteza a doua. Acest lucru ne conduce la o a doua condiţie asupra lui m şi n: $2m+n=0$. Combinat cu $m+3n = \dfrac{27}{10}$, obţinem $m = -\dfrac{27}{50}$ şi $n = \dfrac{27}{25}$.

Calculul de mai sus arată de fapt că graficul funcţiei $f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ este situat sub tangenta la grafic în punctul de abscisă $\dfrac{1}{3}$ (şi asta fără ca f să fie o funcţie concavă pe tot intervalul).

Problema 4. Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul ω şi punctul P în interiorul său. Dreptele AP, BP, respectiv CP intersectează a doua oară cercul ω în punctele D, E, respectiv F. Dacă A', B', C' sunt simetricele punctelor A, B, C faţă de dreptele EF, FD, respectiv DE, arătaţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea.

Ioan-Laurenţiu Ploscaru

Soluţie:
Vrem să arătăm că $\triangle PAB \sim \triangle PA'B'$. Odată făcut acest lucru problema se termină imediat deoarece, în mod similar, $\triangle PBC \sim \triangle PB'C'$ şi $\triangle PCA \sim \triangle PC'A'$, iar reunind aceste trei bucăţi obţinem concluzia, eventual din cazul unghi-unghi. (Va rezulta şi că punctul P se află în interiorul triunghiului $A'B'C'$, deoarece $m(\angle A'PB')+m(\angle B'PC')+m(\angle C'PA') = m(\angle APB)+m(\angle BPC)+m(\angle CPA) = 360°$.)

În mod evident $\triangle PAE \sim \triangle PBD$, de unde $\dfrac{AE}{PE} = \dfrac{BD}{PD}$. Dar, din simetrii, $AE = A'E$ şi $BD = B'D$. Atunci $\dfrac{A'E}{PE} = \dfrac{B'D}{PD}$.

Mai mult, $m(\angle A'EP) = |m(\angle PEF) - m(\angle A'EF)| = |m(\angle BEF) - m(\angle AEF)| = |m(\angle BDF) - m(\angle ADF)| = |m(\angle B'DF) - m(\angle PDF)| = m(\angle B'DP)$.

De aici reiese imediat că $\triangle PA'E \sim \triangle PB'D$, iar mai departe $\dfrac{PA'}{PE} = \dfrac{PB'}{PD}$ şi $\angle A'PE \equiv \angle B'PD \Rightarrow \angle A'PB' \equiv \angle EPD$. Aşadar $\triangle A'PB' \sim \triangle EPD$, iar cum $\triangle EPD \sim \triangle APB$, concluzia reiese. (De fapt ultimul paragraf e o imediată consecinţă a fenomenului de omotetie rotaţională.)