Societatea de Ştiinţe Matematice din România Ministerul Educaţiei Naţionale

Al patrulea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 27 mai 2015

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Determinaţi mulţimile $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ care îl conţin pe 2015 şi care au proprietatea că $|a_i - a_j|$ este număr prim, oricare ar fi numerele distincte $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$

Problema 3. Considerăm triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$, şi centrul I al cercului înscris în acesta. Fie M mijlocul laturii BC, iar D proiecţia lui I pe BC. Dreapta AI intersectează cercul de centru M şi rază MD în punctele P şi Q. Să se arate că $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{PMQ}) = 180°$.

Problema 4. Avem n numere naturale nenule, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nu neapărat distincte, care au suma $2S$. Numărul natural k se numeşte *separator* dacă se pot alege k dintre numerele a_i care să aibă suma egală cu S. Care este numărul maxim posibil de numere separatoare?

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Al doilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 13 mai 2015
Soluţii

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Determinaţi mulţimile $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ care îl conţin pe 2015 şi care au proprietatea că $|a_i - a_j|$ este număr prim, oricare ar fi numerele distincte $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Lucian Petrescu

Soluţie: Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Vom arăta că nu există în mulţimea A trei elemente de aceeaşi paritate şi conform enunţului va rezulta de aici că mulţimea A are exact patru elemente.
Dacă prin absurd în A ar exista elementele $x = 2k + r$, $y = 2l + r$ şi $z = 2s + r$, unde $k < l < s$ şi $r \in \{0; 1\}$, atunci, conform principiului cutiei, ar rezulta că cel puţin unul dintre numerele $l - k$, $s - k$, $s - l$ ar fi par, deci cel puţin unul dintre numerele $y - x = 2(l - k)$, $z - x = 2(s - k)$ şi $z - y = 2(s - l)$ trebuie să fie multiplu de 4, deci număr compus, fals.
Aşadar mulţimea A are patru elemente: două pare şi două impare. Tratăm separat cele două situaţii, după cum cel mai mic element al mulţimii A este par sau impar.

1. $A = \{2a, 2b, 2c + 1, 2d + 1\}$, cu $a < b$ şi $c < d$. Din enunţ rezultă că numerele $2b - 2a = 2(b - a)$ şi $(2d + 1) - (2c + 1) = 2(d - c)$ sunt prime. Deci $b - a = d - c = 1$ şi prin urmare $A = \{2a, 2a + 2, 2c + 1, 2c + 3\}$.

   Tot în baza enunţului obţinem şi că numerele $(2c + 1) - (2a + 2) = 2n - 1$, $(2c + 1) - 2a = 2n + 1$ şi $(2c + 3) - 2a = 2n + 3$ sunt simultan prime, unde $n = c - a \geq 2$. Vom arăta că acest lucru este posibil doar dacă $n = 2$, valoare ce va genera numerele prime $2n - 1 = 3$, $2n + 1 = 5$ şi $2n + 3 = 7$. Acest lucru reiese imediat din analiza următoarelor trei cazuri:

   (a) dacă $n = 3m$, cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, atunci $2n + 3 \geq 9$ şi $2n + 3 = 3(2m + 1) \vdots 3$, fals;

   (b) dacă $n = 3m + 1$, cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, atunci $2n + 1 \geq 9$ şi $2n + 1 = 3(2m + 1) \vdots 3$, fals;

   (c) dacă $n = 3m + 2$, cu $m \in \mathbb{N}$, atunci $2n - 1 \geq 3$ şi $2n - 1 = 3(2m + 1) \vdots 3$, deci $m = 0$, adică $n = 2$.

   Prin urmare concluzionăm că $n = c - a = 2$, deci obţinem mulţimile $A = \{2a, 2a + 2, 2a + 5, 2a + 7\}$, pentru orice număr natural a.

2. $A = \{2x+1, 2y+3, 2z, 2t+2\}$, cu $x < y$ şi $z < t$. Acelaşi tip de raţionament ca în cazul anterior ne conduce la concluzia că $A = \{2x+1, 2x+3, 2x+6, 2x+8\}$, pentru orice număr natural x.

Impunând, în final, condiţia ca $2015 \in A$ obţinem ca soluţii mulţimile:

$$A_1 = \{2008, 2010, 2013, 2015\}, \ \ A_2 = \{2010, 2012, 2015, 2017\},$$

$$A_3 = \{2013, 2015, 2018, 2020\} \ \text{ şi } \ A_4 = \{2015, 2017, 2020, 2022\}.$$

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$

Alexandru Mihalcu

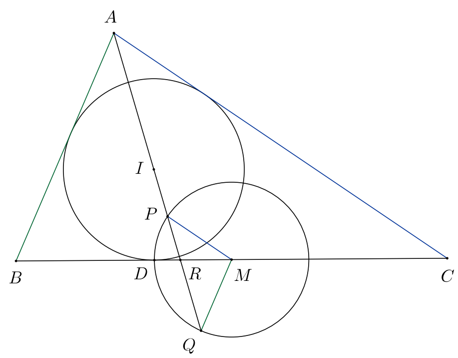
Soluţie:
Analizând ecuaţia mod 3, obţinem: $5^b \equiv 1 \pmod 3$, de unde rezultă că b este par. Fie $b = 2x$ ($x \in \mathbb{N}^*$). Obţinem: $(2^a \cdot 5^x - 1) \cdot (2^a \cdot 5^x + 1) = 3^c \cdot 11^d$. Cum $cmmdc(2^a \cdot 5^x - 1, 2^a \cdot 5^x + 1) = 1$, avem trei cazuri:
1. $2^a \cdot 5^x - 1 = 1$, $2^a \cdot 5^x + 1 = 3^c \cdot 11^d$, prima dintre cele două relaţii neavând soluţii în $\mathbb{N}^*$.
2. $2^a \cdot 5^x - 1 = 11^d$, $2^a \cdot 5^x + 1 = 3^c$, prima relaţie fiind falsă (modulo 5 se reduce la $-1 \equiv 1$).
3. $2^a \cdot 5^x + 1 = 11^d$, $2^a \cdot 5^x - 1 = 3^c$; scăzând cele două relaţii, obţinem $11^d - 3^c = 2$. Analizând mod 3, obţinem $2^d \equiv 2$, deci d este impar. Analizând ultima relaţie modulo 4, obţinem $3^c \equiv 1$, deci c este par. Atunci $2^a \cdot 5^x = 3^c + 1 \equiv 2 \pmod 4$ implică $a = 1$ şi deci $2 \cdot 5^x = 3^c + 1$.
Fie $c = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Modulo 10, rezultă k impar. Conform *Lifting The Exponent Lemma*, $x = v_5(2 \cdot 5^x) = v_5(1^k + 9^k) = v_5(10) + v_5(k) = 1 + v_5(k)$, deci $5^{x-1} | k$.
Dacă $x = 1$ obţinem $b = 2,\ c = 2,\ d = 1$.
Dacă $x > 1$: $2 \cdot 5^x = 9^k + 1 \geq 9^{5^{x-1}} + 1$, fals.
Obţinem singura soluţie: $a = 1,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 1$.
Altă finalizare la cazul **3***:* scăzând cele două relaţii, obţinem $11^d - 3^c = 2$; analizând mod 3, obţinem $2^d \equiv 2$, deci d este impar. Din prima ecuaţie, modulo 4, rezultă $a = 1$ şi $2 \cdot 5^x = 11^d - 1 = (11-1)(11^{d-1} + \ldots + 11 + 1)$, deci $5^{x-1} = 11^{d-1} + \ldots + 11 + 1$. Atunci $x = 1$ sau $5 \mid 11^{d-1} + \ldots + 11 + 1$. Ultimul caz implică $5 \mid d$, dar atunci $11^{d-1} + \ldots + 11 + 1 \ \vdots\ 11^4 + \ldots + 11 + 1$ care nu e putere a lui 5.

Problema 3. Considerăm triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$, şi centrul I al cercului înscris în acesta. Fie M mijlocul laturii BC, iar D proiecţia lui I pe BC. Dreapta AI intersectează cercul de centru M şi rază MD în punctele P şi Q. Să se arate că $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{PMQ}) = 180°$.

Laurenţiu Ploscaru

Soluţia 1:
Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că $AB < AC$ şi $AP < AQ$. Considerăm punctele E şi F în care cercul înscris e tangent la laturile AC, respectiv AB, apoi punctele $\{P'\} = DE \cap AI$ şi $\{Q'\} = DF \cap AI$. Vrem să arătăm că $MP' \parallel AC$ şi $MQ' \parallel AB$, iar mai apoi că $P \equiv P'$ şi $Q \equiv Q'$, ceea ce ar implica în mod trivial cerinţa problemei.
Să observăm că $m(\widehat{P'IB}) = 180° - m(\widehat{AIB}) = 90° - m(\widehat{ACB})/2$, în timp ce faptul că $\triangle CED$ este isocel în C ne dă relaţia $m(\widehat{P'DC}) = 90° - m(\widehat{ACB})/2$. Prin urmare, $\widehat{P'IB} \equiv \widehat{P'DC}$, iar patrulaterul $BDP'I$ este inscriptibil, de unde reiese că $BP' \perp AI$.
Fie acum N mijlocul laturii $[AB]$. Avem $\widehat{AP'N} \equiv \widehat{P'AN} \equiv \widehat{P'AC}$, aşadar $NP' \parallel AC$. De asemenea $MN \parallel AC$, MN fiind linie mijlocie în $\triangle ABC$. Prin urmare punctele M, N, P' sunt coliniare, iar $MP' \parallel AC$. În mod similar se arată că $MQ' \parallel AB$.
Cum $\triangle CDE$ este isoscel în C, iar MP' este paralelă la latura AC, din teorema fundamentală a asemănării rezultă că şi $\triangle P'MD$ este isoscel în C, deci $MD = MP'$, iar în mod analog se obţtine că $MD = MQ'$. Or asta înseamnă că M este centrul cercului $\odot(DP'Q')$, iar demonstraţia se încheie.

Soluţia 2: Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că $AB < AC$ şi $AP < AQ$. Fie R piciorul bisectoarei din A. Atunci $MP = MQ = MD = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b-c}{2}$, deci $\frac{MP}{AC} = \frac{b-c}{2b}$. Pe de altă parte, $RM = RC - MC = \frac{ab}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$ implică $\frac{RM}{RC} = \frac{b-c}{2b} = \frac{MP}{AC}$ iar unghiul R este obtuz şi comun, din cazul LLU rezultă $\Delta RMP \sim \Delta RCA$, deci $PM \parallel AC$.
Analog se arată că $\frac{RM}{RB} = \frac{MQ}{AB}$. Cum unghiurile $\angle BAR$ şi $\angle MQP$ sunt ascuţite, din cazul LLU rezultă că $\Delta RMQ \sim \Delta RAB$, deci $QM \parallel AB$.



Soluţia 3: Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că $AB < AC$ şi $AP < AQ$. Fie $BP' \perp AI$, $P' \in AI$, şi $\{S\} = BP' \cap AC$. În triunghiul ABS, AP' este bisectoare şi înălţime, deci şi mediană, adică P' este mijlocul lui $[BS]$. Atunci $[MP']$ este linie mijlocie în triunghiul BCS, deci $MP' \parallel AC$. Fie Q' proiecţia lui C pe AI. Ca mai sus rezultă $MQ' \parallel AB$. Vom demonstra că $MP' = MQ' = MD$, de unde va rezulta că $P = P'$, $Q = Q'$ şi apoi concluzia. Patrulaterul $BIP'D$ este înscris în cercul de diametru $[AI]$, deci $m(\angle DP'Q') = m(\angle IBD) = \frac{1}{2}m(\angle B)$. Atunci $m(\angle DP'M) = m(\angle DP'Q') + m(\angle Q'P'M) = \frac{1}{2}m(\angle B) + \frac{1}{2}m(\angle A)$. Cum $m(\angle P'MD) = m(\angle C)$, din triunghiul $DP'M$ rezultă că $m(\angle P'DM) = 180^\circ - m(\angle C) - \frac{m(\angle A)+m(\angle B)}{2} = \frac{m(\angle A)+m(\angle B)}{2} = m(\angle DP'M)$, deci $MP' = MD$. Asemănător se arată că $MQ' = MD$.

Problema 4. Avem n numere naturale nenule, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, nu neapărat distincte, care au suma $2S$. Numărul natural k se numeşte *separator* dacă se pot alege k dintre numerele a_i care să aibă suma egală cu S. Care este numărul maxim posibil de numere separatoare?

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2012, prelucrare

Soluţie:
Dacă k este separator, atunci şi $n - k$ este separator.
Dacă 1 este separator, atunci nu putem avea alte numere separatoare în afară de 1 şi $n - 1$.
Pentru $n = 1$ nu putem avea niciun separator. Pentru $n = 2$, doar 1 poate fi separator (în cazul în care cele două numere sunt egale); pentru $n = 3$ doar 1 şi 2 pot fi separatori (de exemplu în cazul numerelor 1,2,3; $1 + 2 = 3$); pentru $n = 4$ putem avea cel mult doi separatori, pe 1 şi 3, de exemplu în cazul numerelor $1, 2, 3, 6$, cu $1 + 2 + 3 = 6$. Arătăm că, pentru $n \geq 5$, numărul maxim de separatori este $n - 3$ şi anume în cazul în care toate numerele $2, 3, \ldots, n - 2$ sunt separatori.
Acest maxim se realizează, de exemplu, pentru numerele $1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{k-2}$, 2^{k-2} dacă $n = 2k$ şi pentru $1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{k-1}, 2^{k-1}$ dacă $n = 2k + 1$.
În cazul $n = 2k$ avem $2S = 2^k$, deci $S = 2^{k-1}$ care se scrie $S = 2^{k-2} + 2^{k-2} = 2^{k-2} + 2^{k-3} + 2^{k-3} = \ldots = 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2 + 1 + 1$.
În cazul $n = 2k + 1$ avem $2S = 2^{k+1}$, deci $S = 2^k$ şi putem scrie $S = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-2} = \ldots = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 + 1$.
Remarcă: Aceste exemple, precum şi altele similare, pot fi descoperite printr-un raţionament inductiv de pas 2: dacă pentru un n am găsit deja numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru care toate numerele de la 2 la $n-2$ să fie separatori ($a_1+a_2+\ldots+a_n = 2S_n$), atunci pentru $n+2$ putem proceda astfel: adăugăm două numere egale $a_{n+1} = a_{n+2}$. Noua sumă totală va fi $2S_{n+1} = 2S_n + 2a_{n+1}$. Distribuind câte unul din numerele a_{n+1} şi a_{n+2} în fiecare din sumele care dădeau S_n, vom obţine sume de

$3, 4, \ldots, n-1$ termeni care dau S_{n+1}, deci $3, 4, \ldots, n-1$ sunt separatori oricum am alege $a_{n+1} = a_{n+2}$. Pentru ca 2 şi n să fie separatori, alegem $a_{n+1} = S_n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+1} + S_n = S_{n+1}$ deci şi 2 (şi deci şi n) sunt separatori.