



Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Nagyszeben, 2014. április 8.

VIII. OSZTÁLY

1. feladat. Adottak az $a, b, c \in (0, \infty)$ valós számok. Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} + \frac{b - \sqrt{ca}}{b + 2(c + a)} + \frac{c - \sqrt{ab}}{c + 2(a + b)} \geq 0.$$

2. feladat. Az $ABCD A' B' C' D'$ kocka élének hossza $AB = a$. A kocka élein felvesszük az $E \in (AB)$ és $F \in (BC)$ pontokat úgy, hogy $AE + CF = EF$.

a) Határozd meg a $(D' DE)$ és $(D' DF)$ síkok által meghatározott lapszög mértékét!

b) Számítsd ki a D' pont EF egyenestől mért távolságát!

3. feladat. Az $n \geq 4$ természetes szám esetén adott az $A = \{n, n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ halmaz. Határozd meg a legkisebb olyan n számot, amelyre az A halmaz tartalmaz öt olyan $a < b < c < d < e$ elemet, amelyek teljesítik az

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}$$

egyenlőségeket!

4. feladat. a) Igazold, hogy egy 2 egység oldalú négyzet nem fedhető le három darab egységnyi sugarú körlappal!

b) Bizonyítsd be, hogy egy 2 egység oldalú négyzet területének több, mint 99,75%-át lefedhetjük három darab egységnyi sugarú körlappal!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.