



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} + \frac{b - \sqrt{ca}}{b + 2(c + a)} + \frac{c - \sqrt{ab}}{c + 2(a + b)} \geq 0.$$

Problema 2. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub cu latura $AB = a$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $AE + CF = EF$.

- Determinați măsura unghiului format de planele $(D'DE)$ și $(D'DF)$.
- Calculați distanța de la D' la dreapta EF .

Problema 3. Se consideră mulțimea $A = \{n, n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$, unde $n \geq 4$ este un număr natural. Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care A conține cinci elemente $a < b < c < d < e$ astfel încât

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}.$$

Problema 4. a) Demonstrați că suprafața unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.

b) Demonstrați că folosind trei discuri de rază 1 se poate acoperi mai mult de 99,75% din suprafața unui pătrat de latură 2.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.