Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Nagyszeben, 2014. április 8.

VI. OSZTÁLY

1. feladat. Legyen A a 2014-nél kisebb vagy egyenlő négyjegyű természetes számok halmaza. Legtöbb hány eleme lehet A olyan részhalmazának, amely csak páronként relatív prím teljes négyzeteket tartalmaz?

2. feladat. Az $n > 1$ természetes számot *p-periodikusnak* nevezzük, ha $\dfrac{1}{n}$ tizedes tört alakban tiszta szakaszos és a legrövidebb szakasz p darab számjegyet tartalmaz. Például a 9-es szám 1-periodikus, mert $\dfrac{1}{9} = 0,(1)$, a 11-es szám 2-periodikus, mert $\dfrac{1}{11} = 0,(09)$.

a) Határozd meg azokat az p-periodikus n természetes számokat, amelyekre az $\dfrac{1}{n}$ periódusában az első számjegy nem nulla!

b) Határozd meg a legnagyobb 4-periodikus prímszámot!

3. feladat. Ha $n \geq 1$ egy természetes szám, azt mondjuk, hogy az (x, y, z) (nem feltétlenül különböző) nem nulla természetes számokból álló számhármas n típusú, ha $x+y+z = n$. Jelöljük $s(n)$-nel az n típusú számhármasok számát.

a) Igazold, hogy nincs olyan n természetes szám, amelyre $s(n) = 14$.

b) Határozd meg a legkisebb olyan n természetes számot, amelyre $s(n) > 2014$.

4. feladat. Az ABC háromszög oldalain adottak az $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (BC)$ és $S, R \in (AC)$ pontok úgy, hogy $AM = CR$, $AN = CS$, $MQB\sphericalangle \equiv RQC\sphericalangle$ és $NPB\sphericalangle \equiv SPC\sphericalangle$.

Bizonyítsd be, hogy ha $MQ + QR = NP + PS$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú!

Munkaidő 2 óra + 30 perc kérdésekre.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.