Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SIBIU 2014

Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Nagyszeben, 2014. április 8.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Ha n egy természetes szám az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény n-edik iteráltja az

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n},$$

függvény, ahol f^0 az identikus függvény.

Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek egyidőben teljesítik a következő két feltételt:

(a) Az $f^0 + f^1$ függvény növekvő;

(b) Létezik olyan $m \geq 1$ természetes szám, amelyre az $f^0 + \cdots + f^m$ függvény csökkenő.

2. feladat. Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvényeket, amelyekre $f \circ f = f$.

3. feladat. Adott az $n \geq 1$ természetes szám és A, B két mátrix az $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ halmazból úgy, hogy $A^2 + B^2 = 2AB$. Igazold, hogy:

a) Az $AB - BA$ mátrix szinguláris és

b) Ha az $A - B$ mátrix rangja 1, akkor az A és B mátrixok szorzata felcserélhető.

4. feladat. Az $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ invertálható mátrix esetén $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^* \neq 0$, ahol A^* az A mátrix adjungáltja. Igazold, hogy az $A^2 + I_4$ mátrix akkor és csak akkor szinguláris, ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ nem nullmátrix, amelyre $AB = -BA$.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.