Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

SIBIU
2014

Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Nagyszeben, 2014. április 8.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Adott az $n \geq 1$ természetes szám. Minden k természetes szám esetén jelölje $a(k, n)$ a k azon d természetes osztóinak számát, amelyekre $k \leq d^2 \leq n^2$. Számítsd ki a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n)$ összeget!

2. feladat. Az $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) $f(1) = 1$,

b) $f(p) = 1 + f(p-1)$ minden p prímszám esetén,

c) $f(p_1 p_2 \cdots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_n)$ bármilyen nem feltétlenül különböző prímszámok esetén.

Igazold, hogy $2^{f(n)} \leq n^3 \leq 3^{f(n)}$ bármely $n \geq 2$ természetes szám esetén!

3. feladat. Adott az $n \geq 1$ természetes szám és az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz. Határozd meg azon $f : A \to A$ növekvő függvények számát, amelyekre $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ bármely x, $y \in A$ esetén!

4. feladat. Az $n \geq 2$ egész számra adottak az a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$ komplex számok. Igazold, hogy a következő állítások ekvivalensek:

P. $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq |a_n + a_0|$ bármely 1 moduluszú z komplex szám esetén.

Q. $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ és $a_0 / a_n \in [0, \infty)$.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.