Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Sibiu, 10 aprilie 2014

Problema 1. Arătaţi că dacă numerele reale $x, y, z > 0$ verifică relaţia $xyz + xy + yz + zx = 4$, atunci

$$x + y + z \geq 3.$$

Lucian Petrescu

Soluţie. Deoarece $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ şi $xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$, notând $s = x + y + z$, rezultă $\frac{s^3}{27} + \frac{s^2}{3} \geq 4$. Obţinem $(s-3)(s+6)^2 \geq 0$,de unde $s \geq 3$. Egalitatea are loc pentru $x = y = z = 1$.

Problema 2. Determinaţi perechile (a, b) de numere întregi pentru care

$$\frac{a+2}{b+1} + \frac{a+1}{b+2} = 1 + \frac{6}{a+b+1}.$$

Lucian Dragomir

Soluţie. Remarcăm că $b \neq -2$ şi $b \neq -1$. Adunând 2 în ambii membri ai egalităţii, obţinem

$$\left(\frac{a+2}{b+1} + 1\right) + \left(\frac{a+1}{b+2} + 1\right) = 3 + \frac{6}{a+b+1} \Leftrightarrow (a+b+3)\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2}\right) = \frac{3(a+b+3)}{a+b+1}.$$

Cazul 1. Dacă $a + b + 3 = 0$, atunci orice pereche de forma $(-3-u, u)$, cu $u \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$ este soluţie a ecuaţiei.

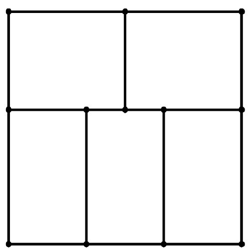
Cazul 2. Dacă $a + b + 3 \neq 0$, atunci $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} = \frac{3}{a+b+1}$, de unde $a = \frac{b^2+4b+3}{2b+3}$.

Deoarece $a \in \mathbb{Z}$, rezultă $2b + 3 \mid b^2 + 4b + 3$, de unde se obţine că $2b + 3 \mid 3$, adică $b \in \{-3, -2, -1, 0\}$. Singura soluţie în acest caz este $b = 0$, $a = 1$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $(1, 0)$ şi perechile $(-3-u, u)$, cu $u \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$.

Problema 3. Arătaţi că dintre şase puncte situate în interiorul unui pătrat de latură 3, se pot alege două astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică decât 2.

[L.L.L.]



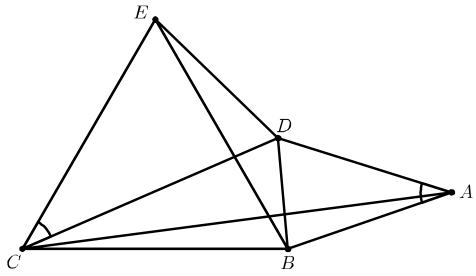
Soluţie. Împărţim pătratul în cinci dreptunghiuri ca în figura de mai sus. Astfel, dreptunghiurile "de jos" au dimensiuni $1 \times \sqrt{3}$ şi diagonala de lungime 2. Dreptunghiurile "de sus" au dimensiuni $1.5 \times \left(3 - \sqrt{3}\right)$ şi diagonala de lungime mai mică decât 2 (se verifică imediat că $1.5^2 + \left(3 - \sqrt{3}\right)^2 < 4$).

Principiul cutiei arată că cel puţin două dintre cele şase puncte se află în interiorul sau pe laturile unuia dintre cele cinci dreptunghiuri, deci distanţa dintre ele este cel mult egală cu lungimea diagonalei dreptunghiului, care este cel mult 2. Egalitatea se poate obţine doar dacă cele două puncte sunt vârfuri opuse ale unuia dintre dreptunghiurile "de jos", ceea ce implică faptul că unul dintre cele şase puncte se află pe o latură a pătratului, imposibil.

Observaţie. Partiţionând pătratul în trei dreptunghiuri 1×1.7 şi două dreptunghiuri 1.5×1.3, se constată că concluzia problemei rămâne adevărată şi dacă cele şase puncte se află în interiorul sau pe laturile pătratului.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater în care $m(\angle A) + m(\angle C) = 60^\circ$. Ştiind că $AB \cdot CD = BC \cdot AD$, arătaţi că $AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

Leonard Giugiuc



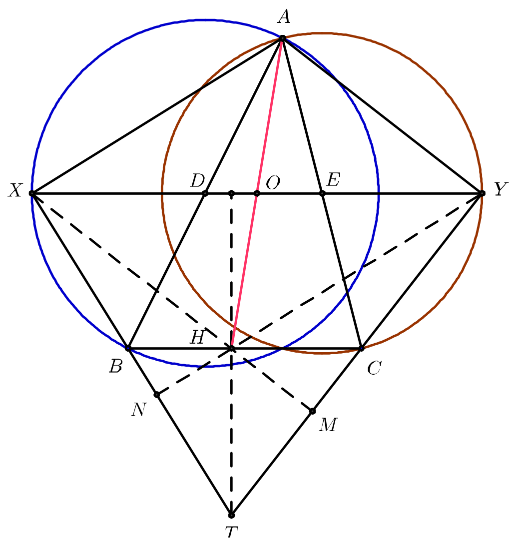
Soluţie. Construim triunghiul echilateral BCE în semiplanul determinat de dreapta BC şi punctul D. Atunci $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{CE}{CD}$ şi $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DCE}$, deci $\Delta DAB \sim \Delta DCE$. Atunci $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{DE}$ şi $\widehat{ADB} \equiv \widehat{CDE}$, de unde $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BDE}$.

Urmează că $\Delta ADC \sim \Delta BDE$ (L.U.L.), deci $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$, de unde $AC \cdot BD = BC \cdot AD = AB \cdot CD$.

Observaţie. Considerând A', C' respectiv D' imaginile punctelor A, C, D printr-o inversiune de centru B, ipoteza revine la $A'D' = C'D'$ şi $m(\widehat{A'D'C'}) = 60^\circ$. Concluzia este echivalentă cu $A'C' = C'D'$, ceea ce este evident.

Problema 5. În triunghiul ABC, fie D, E mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Cercul de diametru $[AB]$ taie DE în partea opusă a lui C faţă de AB în X. Cercul de diametru $[AC]$ taie DE de partea opusă lui B faţă de AC în Y. Fie T intersecţia lui XB cu YC. Arătaţi că ortocentrul triunghiului XYT este pe BC.

Marius Bocanu



Soluţie. Fie XM şi YN înălţimi ale triunghiului XYT şi H intersecţia acestora. Cum $AY \perp YT$, rezultă $AY \parallel XM$. Analog, $AX \parallel YN$, deci $AXHN$ este paralelogram. Centrul acestuia, O, se află pe linia mijlocie EF, deci H, simetricul lui A faţă de O, se găseşte pe BC.