

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1.

Se consideră mulțimea A a numerelor de patru cifre cel mult egale cu 2014. Determinați numărul maxim de elemente al unei submulțimi a lui A care conține numai pătrate perfecte, oricare două prime între ele.

Soluție. Dacă $n^2 \in A$, atunci $n \in \{32, 33, 34, \dots, 44\}$ **3p**

Pentru a îndeplini condițiile din enunț, dintre elementele pătrate perfecte ale lui A , vom păstra un pătrat perfect multiplu de 4, un pătrat perfect multiplu de 9, dar nu și de 4, un pătrat perfect multiplu de 25, care nu este multiplu de 4 sau 9 etc **3p**

Un exemplu poate fi: $32^2, 33^2, 35^2, 37^2, 41^2$ și 43^2 .

Numărul maxim de elemente este 6 **1p**

Problema 2. Un număr natural $n > 1$ se numește *p-periodic* dacă $\frac{1}{n}$ se poate scrie sub forma unei fracții zecimale periodice simple, a cărei cea mai scurtă perioadă este formată din p cifre. Spre exemplu, numărul 9 este 1-periodic, deoarece $\frac{1}{9} = 0, (1)$, iar numărul 11 este 2-periodic, **intrucât**
 $\frac{1}{11} = 0, (09)$.

a) Determinați numerele naturale p -periodice n care au proprietatea că prima cifră a perioadei numărului $\frac{1}{n}$ este nenulă.

b) Determinați cel mai mare număr prim care este 4-periodic.

Soluție. a) Deoarece $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{10}$, rezultă $n \leq 10$ și $(n, 10) = 1$ **2p**

Înseamnă că $n \in \{3, 7, 9\}$ **1p**

b) $\frac{1}{n} = \frac{m}{9999}$, unde $1 \leq m \leq 9998$ **1p**

Deci $n \cdot m = 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$

n este număr prim și cel mai mare în condițiile date, rezultă $n = 101$

Într-adevăr, $\frac{1}{101} = \frac{99}{9999} = 0, (0099)$ **3p**

Problema 3. Se consideră un număr natural n . Spunem că un triplet de numere naturale nenule, nu neapărat distincte (x, y, z) este de tip n dacă $x + y + z = n$ și notăm cu $s(n)$ numărul tripletelor de tip n .

a) Arătați că nu există niciun număr natural n pentru care $s(n) = 14$.

b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $s(n) > 2014$.

Soluție. a) Trei numere diferite două câte două generează 6 triplete. Dacă numai două dintre numerele tripletului sunt egale se pot forma 3 astfel de triplete. Nu se poate forma decât cel mult un triplet cu toate componentele egale. Rezultă că numărul tripletelor este de forma $3k$ sau $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, iar 14 este de forma $3k + 2$. În concluzie nu există numere naturale care să verifice condiția **3p**

b) Pentru $x = 1$ rezultă $y + z = n - 1$ și avem $n - 2$ triplete.

Pentru $x = 2$ rezultă $y + z = n - 2$ și avem $n - 3$ triplete.

.....

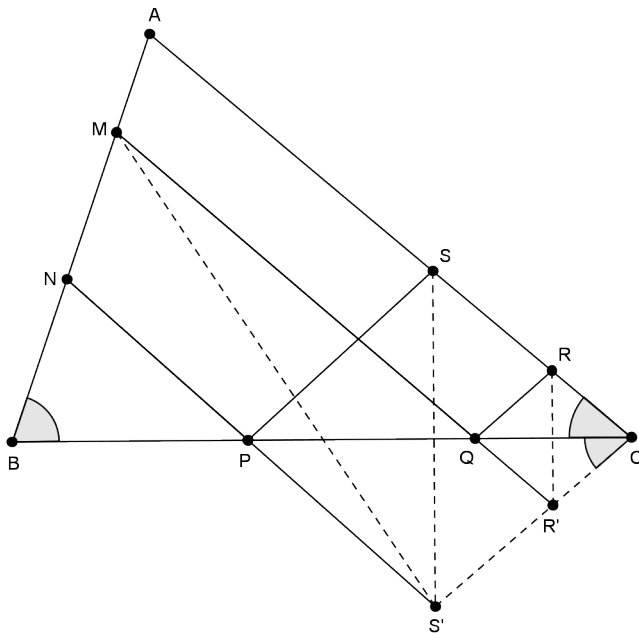
Pentru $x = n - 2$ rezultă $y + z = 2$ și avem 1 triplet. **2p**

Numărul total de triplete este $1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

Din condiția $(n - 2)(n - 1) \geq 4030$ și n cel mai mic număr natural, rezultă $n = 65$ **2p**

Problema 4. În triunghiul ABC considerăm punctele $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (BC)$ și $S, R \in (AC)$ astfel încât $AM = CR$, $AN = CS$, $\sphericalangle MQB \equiv \sphericalangle RQC$ și $\sphericalangle NPB \equiv \sphericalangle SPC$. Arătați că dacă $MQ + QR = NP + PS$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Soluție.



Fie R' simetricul punctului R în raport cu dreapta BC . Rezultă că $\triangle QRC \equiv \triangle QR'C$.
Deducem că $\widehat{CR'} = \widehat{CR}$, $\widehat{QCR'} \equiv \widehat{QCR}$ și $\widehat{R'QC} \equiv \widehat{RQC}$ **1p**

Deoarece $\widehat{R'QC} \equiv \widehat{MQB}$ rezultă că punctele M, Q, R' sunt coliniare, prin urmare $MR' = MQ + QR' = MQ + QR$ (1) **1p**

Analog, dacă S' este simetricul punctului S în raport cu dreapta BC , punctele N, P, S' sunt coliniare și $NS' = NP + PS' = NP + PS$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $MR' = NS'$ **2p**

Deoarece $\widehat{R'CQ} \equiv \widehat{RCQ} \equiv \widehat{PCS'}$ rezultă că punctele C, R', S' sunt coliniare. Prin urmare $S'R' = S'C - R'C = SC - RC = AN - AM = MN$ **1p**

$\triangle MNS' \equiv \triangle S'R'M$ (L.L.L.) implică $\widehat{NMS'} \equiv \widehat{MS'R'}$, de unde $AB \parallel S'C$. Înseamnă că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BCS'} \equiv \widehat{ACB}$, așadar $\triangle ABC$ este isoscel **2p**