

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a**

**Problema 1.** Determinați numerele de forma  $\overline{abc}$  care verifică relația

$$b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10.$$

*Gazeta Matematică*

**Soluție.** Relația din ipoteză revine la  $b(10a + c) = c(10a + b) + 10 \Leftrightarrow ab = ac + 1$ . ... **3 p**

Obținem că  $a(b - c) = 1$ , de unde  $a = b - c = 1$  ..... **2 p**

Numerele căutate sunt 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198 ..... **2 p**

**Problema 2.** Fie  $M$  mulțimea numerelor palindrom de forma  $5n + 4$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ . (Un număr natural se numește *palindrom* dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu, numerele 7, 191, 23532, 3770773 sunt numere palindrom.)

- a) Dacă scriem în ordine crescătoare elementele mulțimii  $M$ , stabiliți care este al 50-lea număr scris.
- b) Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre elementele mulțimii  $M$  care se scriu cu cifre nenule și au suma cifrelor 2014.

**Soluție.**

- a) Numerele din mulțimea  $M$  au ultima cifră 4 sau 9. În mulțimea  $M$  există două numere de o cifră (4 și 9), două numere de două cifre (44 și 99), 20 de numere de trei cifre (404, 414, ..., 494, 909, 919, ..., 999) și 20 de numere de patru cifre (4004, 4114, ..., 4994, 9009, 9119, ..., 9999) ..... **2 p**

Al 50-lea număr din  $M$  este al șaselea număr de cinci cifre, anume 40504 ..... **1 p**

- b) Pentru a obține numere mici, ar trebui ca acestea să aibă cât mai puține cifre, prin urmare vom lua cât mai multe cifre de 9. Cel mai mic număr din  $M$  cu suma cifrelor 2014 este  $\underbrace{9899 \dots 989}_{220 \text{ de } 9}$  ..... **2 p**

Pentru a obține numere mari, ar trebui ca acestea să aibă cât mai multe cifre. Prin urmare, vom lua numărul maxim de cifre de 1, scriind cifra 4 pe prima și ultima poziție.

Numărul cerut este  $4 \underbrace{11 \dots 11}_{2006 \text{ de } 1} 4$  ..... **2 p**

**Problema 3.** Se consideră mulțimea  $A = \{1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{2014}\}$ . Spunem că se realizează o *partiție* a lui  $A$  dacă mulțimea  $A$  este scrisă ca o reuniune de submulțimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.

- a) Demonstrați că nu există o partiție a lui  $A$  astfel încât produsul elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.
- b) Arătați că există o partiție a lui  $A$  astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.

### Soluție

- a) Presupunem că există o astfel de partiție. Cum produsul elementelor fiecărei submulțimi din partiție este pătrat perfect, deducem că produsul tuturor elementelor din mulțimea  $A$  este pătrat perfect.

Însă produsul elementelor lui  $A$  este  $3^{1+2+3+\dots+2014} = 3^{2015 \cdot 1007}$  și acest număr nu este pătrat perfect, deoarece exponentul lui 3 este impar. .... **3 p**

- b) Observăm că  $3^{2n} + 3^{2n+1} = (3^n \cdot 2)^2$ . .... **2 p**

O posibilă partiție este  $A = \{1, 3\} \cup \{3^2, 3^3\} \cup \dots \cup \{3^{2012}, 3^{2013}\} \cup \{3^{2014}\}$  .... **2 p**

**Problema 4.** Un număr natural de 10 cifre se numește *dichisit* dacă cifrele sale aparțin mulțimii  $\{1, 2, 3\}$  și oricare două cifre consecutive diferă prin 1.

- a) Arătați că un număr dichisit conține în scrierea sa exact cinci cifre de 2.  
b) Stabiliți câte numere dichisite există.  
c) Demonstrați că suma tuturor numerelor dichisite se divide cu 1408.

### Soluție.

- a) În scrierea unui număr dichisit, cifrele pare alternează cu cele impare. Cum numerele au 10 cifre, ele vor conține exact cinci cifre pare, deci exact cinci de 2. .... **1 p**

- b) Există  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$  numere dichisite de forma  $\overline{2a2b2c2d2e}$  și  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$  numere de forma  $\overline{a2b2c2d2e2}$ . În total, există 64 de numere dichisite. .... **2 p**

- c) Dacă numărul  $\overline{a_1 a_2 \dots a_{10}}$  este dichisit, atunci și numărul  $\overline{(4 - a_1)(4 - a_2) \dots (4 - a_{10})}$  este dichisit și distinct de primul. Suma acestor două numere este 4444444444. .... **2 p**

Grupăm numerele dichisite în 32 astfel de perechi. Prin urmare, suma tuturor numerelor este  $32 \cdot 4444444444 = 2^7 \cdot 11 \cdot 101010101 = 1408 \cdot 101010101$ . .... **2 p**