



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a IX-a

Problema 1. Un șir de numere este numit *complet* dacă are termeni naturali nenuli și orice număr natural nenul are cel puțin un multiplu printre termenii șirului.

Arătați că o progresie aritmetică este șir *complet* dacă și numai dacă rația sa divide primul termen.

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de gradul al doilea, având proprietatea:

pentru orice numere reale m și n , ecuația $f(x) = mx + n$ are soluții dacă și numai dacă ecuația $g(x) = mx + n$ are soluții.

Arătați că funcțiile f și g sunt egale.

Problema 3. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ascuțitunghic ABC și D, E, F intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$.

a) Arătați că aria triunghiului DEF este cel mult un sfert din aria triunghiului ABC .

b) Arătați că raza cercului înscris în triunghiul DEF este cel mult un sfert din raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n și funcția

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } x \text{ este par} \\ \frac{x-1}{2} + 2^{n-1}, & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}.$$

Determinați mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = x\}.$$

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.