Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Brassó, 2013. április 2.

VII. OSZTÁLY

1. feladat. Az ABC háromszögben az AD szögfelező és a BE oldalfelző a P pontban metszi egymást. $(D \in BC, E \in AC)$ Az AB és CP egyenesek metszéspontja F. A B ponton át a CF egyeneshez húzott párhuzamos a DF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $DM = BF$.

2. feladat. Egy egységoldalú dobókocka lapjai 1-től 6-ig vannak számozva úgy, hogy a szemben levő lapokon a számok összege 7.

27 ilyen dobókockából összerakunk egy 3 egység oldalú nagyobb kockát.

Milyen értékeket vehet fel az így keletkezett nagy kocka hat lapján látható számjegyek összege?

3. feladat. Az $ABCD$ téglalapban $5AD < 2AB$. Az AB oldalon felvesszük az S és T pontokat úgy, hogy $AS = ST = TB$. Legyen M, N és P az A, S és T pontok vetülete a DS, DT illetve DB egyenesre.

Igazold, hogy M, N és P akkor és csak akkor kollineáris, ha $15AD^2 = 2AB^2$.

4. feladat

Adott az n nem nulla természetes szám és az $M = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ halmaz.

Határozd meg, hogy az M halmaz hányféleképpen bontható fel három nemüres A, B, C halmazra $(A \cup B \cup C = M, A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset)$ úgy, hogy egyszerre teljesüljenek a következő feltételek:

(i) bármely $a \in A$ és bármely $b \in B$ esetén az a szám b-vel való osztási maradéka a C halmazban van;

(ii) bármely $c \in C$ esetén léteznek $a \in A$ és $b \in B$ számok úgy, hogy c az a szám b-vel való osztási maradéka.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.