Societatea de Ştiinţe Matematice din România   Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013

CLASA a VII-a

Problema 1. În triunghiul ABC, bisectoarea AD ($D \in BC$) şi mediana BE ($E \in AC$) se intersectează în punctul P. Dreptele AB şi CP se întâlnesc în punctul F. Paralela prin B la CF intersectează dreapta DF în punctul M. Demonstraţi că $DM = BF$.

Problema 2. Un zar este un cub de muchie 1, având înscrise pe feţe cifrele de la 1 la 6, astfel încât suma cifrelor de pe oricare două feţe opuse este 7.

Folosind 27 de zaruri, construim un cub cu muchia 3.

Stabiliţi ce valori poate lua suma tuturor cifrelor de pe cele şase feţe ale cubului de muchie 3.

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $5AD < 2AB$. Pe latura AB se consideră punctele S şi T astfel încât $AS = ST = TB$. Notăm cu M, N şi P proiecţiile punctelor A, S respectiv T pe dreptele DS, DT respectiv DB.

Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare dacă şi numai dacă $15AD^2 = 2AB^2$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul; considerăm mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$.

Stabiliţi în câte moduri se poate partiţiona mulţimea M în trei submulţimi nevide A, B, C ($A \cup B \cup C = M, A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$) astfel încât să fie satisfăcute simultan condiţiile:

(i) pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$, restul împărţirii lui a la b aparţine mulţimii C;

(ii) pentru oricare $c \in C$, există $a \in A$ şi $b \in B$ astfel încât c este restul împărţirii lui a la b.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.