Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Brassó, 2013. április 2.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyek bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén teljesítik az

$$(a^2 + ab + b^2) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

egyenlőséget!

2. feladat. Adott az $(A, +, \cdot)$ gyűrű úgy, hogy egyidőben teljesül az alábbi két feltétel:

(1) A nem test,
(2) az A minden nem invertálható x eleme esetén létezik egy x-től függő $m \geq 1$ egész szám úgy, hogy

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

Igazold, hogy:

(a) $x + x = 0$, bármely $x \in A$ esetén,
(b) $x^2 = x$, bármely nem invertálható $x \in A$ esetén!

3. feladat. Az $a \in (0, 1)$ szám esetén legyen $\mathcal{C}$ azon növekvő $f\colon [0, 1] \to [0, \infty)$ függvények halmaza, amelyekre $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Számítsd ki:

(a) $\displaystyle\max_{f\in\mathcal{C}} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\max_{f\in\mathcal{C}} \int_0^a \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$.

4. feladat. Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám, $(K, +, \cdot)$ egy olyan kommutatív test, amelyben $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ darab}} \neq 0$, $m = 2, \ldots, n$, $f \in K[X]$ egy n-edfokú polinom és G a $(K, +)$ additív csoport egy részcsoportja ($G \neq K$).

Igazold, hogy létezik $a \in K$ úgy, hogy $f(a) \notin G$.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.