CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ”GHEORGHE LAZĂR”
Ediţia a XIV-a, 22-24 martie 2013
Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_0 = \frac{1}{2}$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \int_0^{x_n} f(t)dt)$ pentru $n \geq 0$. Să se arate că şirul (x_n) este convergent şi să se calculeze limita sa.

Florin Rotaru, Focsani
G.M.11/2012-26689

2. Fie $x_1, x_2, ...x_n$ puncte distincte două câte două şi $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$. Să se arate că dacă $x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}, k = 1, 2, ...n$ atunci există $c_n \epsilon \mathbb{R}$ astfel încât

$$P_n{}''(x) - 2xP_n{}'(x) - c_nP_n(x) = 0$$

Ioan Ţincu, Sibiu

3. Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1. $(M, \cdot)$ e grup
2. Există $n \epsilon N^*, n \geq 2$ pentru care ecuaţia $x^n = x$ are soluţie unică în M.

Marius Gârjoabă, Sibiu

4. Se consideră o funcţie $f : [1,2] \to R$, continuă şi crescătoare. Să se arate că:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^n}dx \leq \frac{1}{n-1}(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) \int_1^2 f(x)dx$$

Mugur Acu, Sibiu