CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "GHEORGHE LAZĂR"
Ediţia a XIV-a, 22-24 martie 2013
Clasa a X-a

1. Arătaţi că:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} + b^{\sqrt{\log_b a}} \leq a + b$$

pentru orice numere $a, b > 1$.

2. Fie $a \in [1, \infty)$ şi $x \geq 0, y \geq 0, z \in R$ astfel că $x + y + z = 0$. Să se arate că:

$$\frac{a^{x-y} + a^{y-z}}{a^{z-x} + a^{x-y}} \geq \frac{3(a^x + a^y + a^z)}{(a^{2x} + a^{2y} + a^{2z})^2}$$

3. Fie $a, b > 0, m, n \in R, n \neq mb$ sî funcţia $f : R \to R, f(x) = \dfrac{ma^x + n}{a^x + b}$.

a) Să se arate că $f(x) + f(2log_a b - x)$ nu depinde de x.

b) Să se arate că graficul funcţiei f admite centru de simetrie unic şi să se precizeze coordonatele acestuia.

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu acelaşi modul $r > 0$.

a) Calculaţi modulul numărului $z = \dfrac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3}$.

b) Arătaţi că

$$r|z_1 + r| + (r + 1)|z_2 + r| + |z_3 + r| + |z_1 z_2 + r| + |z_2 z_3 + r| \geq 2r(r + 1).$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.