UNIVERSITATEA ”AUREL VLAICU” DIN ARAD
FACULTATEA DE ŞTIINŢE EXACTE

CONCURSUL INTERNAŢIONAL DE MATEMATICĂ ”CAIUS IACOB” - Ediţia a V-a

CLASA a XI-a - TEHNICĂ MATEMATICĂ

I. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^{2013} \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ a \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

este continuă.

II. (i) Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $AA^t = A + I_2$, A^t fiind transpusa matricii A.

(ii) Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 2013 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III. Să se arate că, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-a-c \end{vmatrix} \geq 0.$$

IV. (i) Să se determine $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \to -\infty} (A + B \cdot \operatorname{arctg} x) = 0 \text{ şi } \lim_{x \to \infty} (A + B \cdot \operatorname{arctg} x) = 1;$$

(ii) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt[3]{1-x^4}} \in (0, \infty).$$

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.