Societatea de Ştiinţe Matematice din România Ministerul Educaţiei Naţionale

Al cincilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 25 mai 2013

Problema 1. Determinaţi toate perechile de numere întregi (x, y) care au proprietatea că fiecare dintre numerele $x^3 + y$ şi $x + y^3$ este divizibil cu $x^2 + y^2$.

Problema 2. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea punctelor de abscisă întreagă situate pe axa numerelor reale d. Elementele mulţimii $\mathcal{M}$ se colorează în alb sau negru. Arătaţi că cel puţin una din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) există o submulţime finită $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ şi un punct $M \in d$ astfel încât punctele mulţimii $\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}$ aflate pe una dintre semidreptele determinate de M pe d sunt toate colorate cu alb, iar punctele mulţimii $\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}$ aflate pe cealaltă semidreaptă sunt toate colorate cu negru;

b) există o submulţime infinită $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ care are *centru de simetrie,* în sensul că există $T \in d$ (centrul de simetrie) cu proprietatea că pentru orice punct $A \in \mathcal{S}$, simetricul lui A faţă de T aparţine lui $\mathcal{S}$ şi are aceeaşi culoare ca şi A.

Problema 3. Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă a expresiei

$$\sqrt{4 - a^2} + \sqrt{4 - b^2} + \sqrt{4 - c^2},$$

unde a, b, c sunt numere reale cu $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Problema 4. Fie triunghiurile ascuţitunghice ABC şi BCD, în care $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$, iar punctele A şi D sunt de o parte şi de alta a dreptei BC. Fie $BE \perp AC$, $E \in (AC)$ şi $CF \perp BD$, $F \in (BD)$. Arătaţi că AD, EF şi dreapta determinată de ortocentrele H_1 şi H_2 ale triunghiurilor ABC şi BCD sunt concurente.