Al treilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 27 aprilie 2013

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există numerele naturale nenule $x_1 < x_2 < ... < x_n$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + ... + \frac{n}{x_n} = p.$$

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z astfel încât $7^x + 13^y = 8^z$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Arătaţi că tangenta comună exterioară a cercurilor înscrise în triunghiurile ABC şi respectiv BCD, diferită de BC, este paralelă cu AD.

Problema 4. Determinaţi toate numerele naturale $n \geq 2$ care au proprietatea: *există o permutare* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *a mulţimii* $\{1, 2, ..., n\}$ *pentru care numerele*

$$a_1 + a_2 + ... + a_k, \; k = 1, 2, ...n,$$

dau resturi distincte la împărţirea cu n.

Al treilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 27 aprilie 2013
Soluţii

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există numerele naturale nenule $x_1 < x_2 < ... < x_n$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + ... + \frac{n}{x_n} = p.$$

Irish Mathematical Olympiad

Soluţie. Să numim *bune* numerele p pentru care există o scriere ca în enunţ. Deoarece $1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_n$, atunci $x_k \geq k$, adică $\frac{k}{x_k} \leq 1$, pentru orice $k = \overline{1, n}$, deci

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + ... + \frac{n}{x_n} \leq n.$$

Ca urmare, numerele *bune* sunt cuprinse între 1 şi n.

Vom arăta că orice număr $p \in \{1, 2, ...n\}$ este *bun*. Evident, n este *bun* (pentru $x_k = k$) şi 1 este *bun* (pentru $x_k = kn$). Pentru $2 \leq p \leq n - 1$, putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_k} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + ... + \frac{p-1}{x_{p-1}}\right) + \left(\frac{p}{x_p} + ... + \frac{n}{x_n}\right).$$

Vom alege numerele $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât suma numerelor din prima paranteză de mai sus să fie egală cu $p - 1$, iar suma numerelor din a doua paranteză să fie egală cu 1. Acest lucru se poate face pentru $x_k = \begin{cases} k, & 1 \leq k \leq p-1 \\ k(n-p+1), & p \leq k \leq n \end{cases}$.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z astfel încât $7^x + 13^y = 8^z$.

Lucian Petrescu

Soluţie. Reducând ecuaţia modulo 3 şi respectiv modulo 4 rezultă că x şi z sunt impare; deci $z = 2m + 1$ şi $x = 2n + 1$, cu $m, n \in \mathbb{N}$. Ecuaţia devine $7^{2n+1} + 13^y = 8^{2m+1}$.

a) Dacă $n = 3s$, cu $s \in \mathbb{N}$, ecuaţia devine $7^{6s+1} + 13^y = 8^{2m+1}$ şi

$$7^{6s+1} + 13^y \equiv 7 \cdot 343^{2s} \equiv 7 \cdot 25^s \equiv 7 \cdot (-1)^s \pmod{13},$$

iar $8^{2m+1} = 8 \cdot 64^m \equiv 8 \cdot (-1)^m \pmod{13}$; deci în acest caz nu avem soluţii.

b) Dacă $n = 3s + 2$, cu $s \in \mathbb{N}$, obţinem $7^{6s+5} + 13^y = 8^{2m+1}$; cum $7^{6s+5} + 13^y \equiv 49 \cdot 343^{2s+1} \equiv 50 \cdot 25^s \equiv 11 \cdot (-1)^s \pmod{13}$ şi $8^{2m+1} = 8 \cdot 64^m \equiv 8 \cdot (-1)^m \pmod{13}$; de aici rezultă că nici în acest caz nu avem soluţii.

c) Dacă $n = 3s + 1$, cu $s \in \mathbb{N}$, obţinem $7^{6s+3} + 13^y = 8^{2m+1}$, sau

$$\left(2^{2m+1} - 7^{2s+1}\right)\left(4^{2m+1} + 2^{2m+1} \cdot 7^{2s+1} + 49^{2s+1}\right) = 13^y.$$

Notând $a = 2^{2m+1}$, $b = 7^{2s+1}$, se arată uşor că $(a - b,\ a^2 + ab + b^2) = 1$, deci $a - b = 1$ şi $a^2 + ab + b^2 = 13^y$.

Din prima relaţie obţinem $2^{2m+1} = 7^{2s+1}+1$, deci $2^{2m+1} = 8\cdot(7^{2s} - 7^{2s-1} + \ldots - 7 + 1) \Leftrightarrow$ $2^{2m-2} = 7^{2s} - 7^{2s-1} + \ldots - 7 + 1$, fals pentru $m \geq 2$, deoarece membrul drept este impar.

Aşadar $m = 1$; rezultă că $s = 0$; concluzionăm că $x = z = 3$ şi $y = 2$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Arătaţi că tangenta comună exterioară a cercurilor înscrise în triunghiurile ABC şi respectiv BCD, diferită de BC, este paralelă cu AD.

Ştefan Spătaru

Soluţie. Fie I_1, respectiv I_2, centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC şi respectiv BCD, iar t cealaltă tangentă exterioară a celor două cercuri. Dacă $AD \parallel BC$, atunci şi I_1I_2 e paralelă cu ele; presupunem în continuare că $AD \nparallel BC$.

Cum tangentele exterioare a două cercuri sunt simetrice faţă de linia centrelor, înseamnă că t, BC şi I_1I_2 sunt concurente, într-un punct notat U. Notăm cu V punctul de intersecţie al dreptelor AD şi BC.

Întrucât $m(\widehat{BI_1C}) = 90° + m(\widehat{BAC}) = 90° + m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BI_2C})$, rezultă că patrulaterul BCI_2I_1 este patrulater inscriptibil. Întrucât:

$$\begin{aligned} m(\widehat{I_1UB}) &= \frac{1}{2}\left(m(\overset{\frown}{CI_2}) - m(\overset{\frown}{BI_1})\right) = m(\widehat{I_2BC}) - m(\widehat{I_1CB}) = \frac{1}{2}\left(m(\widehat{DBC}) - m(\widehat{ACB})\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(m(\overset{\frown}{DC}) - m(\overset{\frown}{AB})\right) = \frac{1}{2}m(\widehat{AVB}), \end{aligned}$$

adică $m(\widehat{AD, BC}) = 2m(\widehat{I_1I_2, BC})$.

Cum BC şi t sunt simetrice faţă de I_1I_2, rezultă $m(\widehat{t, BC}) = 2m(\widehat{I_1I_2, BC}) = m(\widehat{AD, BC})$, deci $t \parallel AD$.

Problema 4. Determinaţi toate numerele naturale $n \geq 2$ care au proprietatea: *există o permutare $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ pentru care numerele*

$$a_1 + a_2 + ... + a_k,\ \ k = 1, 2, ...n,$$

dau resturi distincte la împărţirea cu n.

Emil Vasile

Soluţie. Fie n un număr cu proprietatea din enunţ. Pentru fiecare $k = \overline{1, n}$, fie r_k restul împărţirii numărului $s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ la n.

Vom arăta că $a_1 = n$. Presupunând contrariul, există $k \geq 2$ astfel încât $a_k = n$, rezultă $s_k = s_{k-1} + n$, deci $n \mid s_k - s_{k-1}$, adică $r_k = r_{k-1}$, absurd. Aşadar $a_1 = n$ şi atunci $r_1 = 0$.

Întrucât $s_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, dacă n ar fi impar, atunci ar rezulta că $n \mid s_n$, deci $r_n = 0 = r_1$, contradicţie. Aşadar, este necesar ca n să fie par. Vom arăta că este şi suficient. Pentru aceasta, fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr par şi permutarea $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, definită prin

$$a_k = \begin{cases} n + 1 - k, & k \text{ impar} \\ k - 1, & k \text{ par} \end{cases}.$$

Demonstrăm că această permutare are proprietatea din enunţ. Pentru orice $k \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ avem:

$$\begin{aligned} s_{2k-1} &= a_1 + a_2 + ... + a_{2k-1} = k(n-1) + 1; \\ s_{2k} &= a_1 + a_2 + ... + a_{2k} = k(n+1), \end{aligned}$$

deci

- $r_{2k-1} = k(n-1)+1-n\left[\frac{kn-(k-1)}{n}\right] = k(n-1)+1-n\cdot\left[k-\frac{k-1}{n}\right] = \begin{cases} 0 & , k=1 \\ n-k+1, & k \geq 2 \end{cases}.$
- $r_{2k} = k(n+1) - n\left[\frac{k(n+1)}{n}\right] = k(n+1) - n \cdot \left[k + \frac{k}{n}\right] = k(n+1) - nk = k.$

Este evident că dacă $a, b \in \{1, 2, ..., n-1\}$ au aceeaşi paritate, atunci $r_a \neq r_b$. Presupunând că există $k, j \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ astfel încât $r_{2k-1} = r_{2j}$, ar rezulta $j = 0$ sau $j = n - k + 1$, imposibil.