Clasa a IX-a

Problema 1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu proprietatea că $a+b+c=ab+bc+ca$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a^2+b+1}+\frac{1}{b^2+c+1}+\frac{1}{c^2+a+1}\leq 1.$$

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Aplicnd C-B-S, obţinem:

$$\left(a^2+b+1\right)\left(1+b+c^2\right)\geq\left(a\cdot 1+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}+1\cdot c\right)^2,$$

de unde

$$\frac{1}{a^2+b+1}\leq\frac{1+b+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

4p

Scriem încă două inegalitaţi similare şi, pentru a demonstra cerinţa problemei, va fi suficient să mai arătăm că $3+\sum a+\sum a^2\leq\left(\sum a\right)^2$. Ţinând seama de condiţia din ipoteză, această din urmă inegalitate revine, după calcule, la binecunoscuta $\sum a^2\geq\sum ab$. **3p**

Problema 2. a) Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătaţi că discurile având ca diametre laturile AB, BC, CD şi DA acoperă în întregime interiorul patrulaterului $ABCD$. Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

b) Fie $ABCD$ un patrulater. Demonstraţi că discurile având ca diametre segmentele AB, AC şi AD acoperă în întregime interiorul triunghiului BCD.

Soluţie. a) Fie M un punct în interiorul patrulaterului $ABCD$; atunci

$$\angle AMB+\angle BMC+\angle CMD+\angle DMA=360^\circ.$$

Rezultă că cel puţin unul dintre cele patru unghiuri are măsura de măcar 90°. Dacă $\angle AMB$ este un astfel de unghi, M aparţine discului de diametru AB şi, de aici, cerinţa problemei. **3p**

b) Notăm cu P, Q şi R proiecţiile vârfului A pe dreptele BC, CD respectiv DB. Indiferent de natura patrulaterului $ABCD$ (convex sau concav), patrulaterele de vârfuri $BPAR$, $CPAQ$ şi $DQAR$ sunt înscrise în cercurile de diametre AB, AC respectiv AD şi, împreună cu interioarele lor, acoperă interiorul triunghiului BCD. Cu att mai mult, discurile având ca diametre segmentele AB, AC şi AD vor acoperi interiorul triunghiului BCD. **4p**

Problema 3. Pe latura AB a triunghiului ABC luăm punctul D cu proprietatea că $AB = 4AD$. Considerăm punctul P, aflat de aceeaşi parte a laturii AB ca şi C, astfel încât $\sphericalangle PDA \equiv \sphericalangle ACB$ şi $PB = 2PD$. Arătaţi că punctele A, B, C şi P sunt conciclice. Titu Zvonaru

Soluţie. Considerăm punctul Q cu proprietăţile: AB separă P şi Q, $AB = 2AQ$ şi $\angle BPD \equiv \angle QAB$. Avem că $\frac{AQ}{AB} = \frac{PD}{PB} = \frac{1}{2}$, prin urmare $\triangle AQB \sim \triangle PDB$. De aici, $\angle AQB \equiv \angle PDB$ şi rezultă că $\angle AQB + \angle ACB = \angle PDB + \angle PDA = 180°$, ceea ce asigură inscriptibilitatea patrulaterului $AQBC$. **3p**

Din $AB = 2AQ$ şi $AB = 4AD$ deducem că $\frac{AQ}{AB} = \frac{AD}{AQ}$, de unde $\triangle AQD \sim \triangle ABQ$. Obţinem că $\angle ADQ \equiv \angle AQB$ şi cum avem şi $\angle AQB \equiv \angle PDB$, rezultă că punctele Q, D şi P sunt coliniare. Ne amintim că $\angle BPD \equiv \angle QAB$, deci patrulaterul $AQBP$ este inscriptibil. În concluzie, punctele A, Q, B, C, P sunt conciclice. **4p**