Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele naturale a, b şi n, cu $\text{cmmdc}(a,n) = 1$. Calculaţi

$$S_n = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{2a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{3a+b}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{na+b}{n}\right\},$$

unde $\{x\}$ desemnează partea fracţionară a numărului real x.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Folosind teorema împărţirii cu rest, avem că, pentru orice $k \in \{1, 2, 3, ..., n\} := A$, există $q_k, r_k \in \mathbb{N}$, cu $0 \leq r_k < n$, astfel încât $ka + b = n \cdot q_k + r_k$. **2p**

Presupunând, prin reducere la absurd, că există $k, j \in A, k \neq j$, astfel încât $r + k = r_j$, am ajunge la $ka + b - n \cdot q_k = ja + b - n \cdot q_j$, adică la $a(k - j) = n(q_k - q_j)$. Ar rezulta atunci că $n \mid a(k - j)$, iar cum $(a, n) = 1$, am obţine că $n \mid k - j$, ceea ce este imposibil cu $k, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ cu $k \neq j$. **2p**

Rezultă aşadar că numerele $ka+b, k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, dau resturi distincte două câte două la împărţirea la n, adică $\{r_1, r_2, ..., r_n\} = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$. **2p**

Avem atunci că

$$S_n = \frac{r_1}{n} + \frac{r_2}{n} + ... + \frac{r_n}{n} = \frac{0}{n} + \frac{1}{n} + ... \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)n}{2n} = \frac{n-1}{2}.$$

1p

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale (m, n) pentru care numărul

$$N = 2^{2n} - 3^{2m} + 2^{n+2} + 6$$

este suma a două numere naturale prime.

Prelucrare Gazeta Matematică

Soluţie. Dacă $n = 0$, atunci $N = 11 - 3^{2m}$ care este număr natural pentru $m \in \{0, 1\}$.

Pentru $m = 0$, $N = 10 = 3 + 7$.

Pentru $m = 1$, $N = 2$, care nu poate fi scris ca sumă de două numere naturale prime. **1p**

Dacă $n > 0$, numărul N este impar, deci el se va scrie $N = 2 + p$, unde p este număr natural prim.

Obţinem

$$p = 2^{2n} - 3^{2m} + 2^{n+2} + 4 = (2^n + 2)^2 - 3^{2m} = (2^n + 3^m + 2)(2^n - 3^m + 2).$$

1p

Deoarece $2^n+3^m+2>1$, rezultă că $2^n-3^m+2=1$ şi $2^n+3^m+2=p$.

Din relaţia $2^n-3^m+2=1$ se obţine $2^n+1=3^m$. Deducem că n este impar. **1p**

Pentru $n=1$, obţinem $m=1$. **1p**

Pentru $n\geq 3$, rezultă că $2^n+1=\mathcal{M}_4+1$ şi, cum $3^m=\mathcal{M}_4+(-1)^m$, deducem că m este par. **1p**

Avem $2^n=(3^k-1)(3^k+1)$, unde $m=2k$. Obţinem $n=3$ şi $k=1$, adică $m=2$.

Pentru $m=2$ şi $n=3$, obţinem $p=19$.

În concluzie $(m,n)\in\{(0,0),(1,1),(2,3)\}$. **2p**

Problema 3. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB=4b, BC=a+b, AC=4a, BD=2b, DC=2a$ şi $\angle DAB\equiv\angle DAC$, unde $a,b>0, a\neq b$. Arătaţi că:

a) $\frac{a}{b}\in\left(\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right)$;

b) punctul D se proiectează pe planul (ABC) în centrul cercului înscris triunghiului ABC.

Soluţie. a) În triunghiul ABC avem $AB+BC>AC$, deci $a+5b>4a$, de unde $\frac{a}{b}<\frac{5}{3}$. **1p**

Deasemenea, $AC+BC>AB$, deci $5a+b>4b$, de unde $\frac{a}{b}>\frac{3}{5}$. Rezultă că $\frac{a}{b}\in\left(\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right)$. **1p**

b) Fie $AD=x>0$. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ADC, obţinem $\cos DAC=\dfrac{x^2+12a^2}{8ax}>0$. Analog, în triunghiul ADB, obţinem $\cos DAB=\dfrac{x^2+12b^2}{8bx}>0$.

Cum unghiurile $\angle DAC$ şi $\angle DAB$ sunt congruente şi ascuţite, rezultă că semidreapta $[AD$ se proiectează pe planul (ABC) după bisectoarea unghiului $\angle CAB$. **1p**

Din $\cos DAC=\cos DAB$, obţinem $x=2\sqrt{3ab}$. **1p**

Din triunghiul ADB, obţinem $\cos ABD=\dfrac{5b-3a}{4b}>0$, iar din triunghiul DBC obţinem $\cos CBD=\dfrac{5b-3a}{4b}>0$.

Cum unghiurile $\angle ABD$ şi $\angle CBD$ sunt congruente şi ascuţite, rezultă că semidreapta $[BD$ se proiectează pe planul (ABC) după bisectoarea unghiului $\angle ABC$. **2p**

Deducem că punctul D se proiectează pe planul (ABC) în centrul cercului înscris triunghiului ABC. **1p**