Clasa a VII-a

Problema 1. a) Determinaţi numerele întregi x şi y care verifică relaţia $x^2 + y^2 = x + y + xy$.

b) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = x + y + xy + 2013$ nu are soluţii întregi.

c) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = x + y + xy + 2014$ nu are soluţii întregi.

d) Arătaţi că există o infinitate de valori naturale ale lui n pentru care ecuaţia $x^2 + y^2 = x + y + xy + n$ are soluţii întregi şi că există o infinitate de valori naturale ale lui n pentru care ecuaţia de mai sus nu are rădăcini întregi.

Gazeta Matematică

Soluţie. a) Înmulţind ecuaţia cu 2, ea se scrie echivalent $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Deducem că două dintre pătrate sunt 1, iar cel de-al treilea este 0.

• Dacă $(x - y)^2 = 0$, $(x - 1)^2 = (y - 1)^2 = 1$ obţinem soluţiile $x = y = 0$ şi $x = y = 2$.

• Dacă $(x - 1)^2 = 0$, $(x - y)^2 = (y - 1)^2 = 1$ obţinem soluţiile $x = 1, y = 0$ şi $x = 1, y = 2$.

• Dacă $(y - 1)^2 = 0$, $(x - y)^2 = (x - 1)^2 = 1$ obţinem soluţiile $x = 0, y = 1$ şi $x = 2, y = 1$. **1p**

b) Înmulţind ecuaţia cu 2, ea se scrie echivalent $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 4028$. Deoarece $4028 = M4$, cele trei pătrate trebuie să fie pare, deci x, y impare. Dacă $x = 2a+1$ şi $y = 2b+1$, ajungem la $(a-b)^2+a^2+b^2 = 1007$. Cum $1007 = M4 + 3$, $a - b$, a şi b ar trebui să fie toate trei impare, ceea ce nu se poate. Aşadar ecuaţia nu are soluţie. **2p**

c) Înmulţind ecuaţia cu 2, ea se scrie echivalent $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 4030$, care dă restul 1 la împărţirea cu 3. Pe de altă parte, uitându-ne la resturile posibile la împărţirea cu 3 ale numerelor $x-1$ şi $y-1$, constatăm că expresia $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ dă restul 0 sau 2 la împărţirea cu 3. **2p**

d) Dacă $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, ca mai sus se ajunge la $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 8k + 4$. Trebuie ca x, y să fie impare şi, dacă $x = 2a + 1$ şi $y = 2b + 1$, ajungem la $(a - b)^2 + a^2 + b^2 = 2k + 1$, adică la $2(a^2 - ab + b^2) = 2k + 1$, care nu are soluţii pentru că un număr par nu poate fi egal cu un număr impar. Aşadar pentru $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, ecuaţia nu are soluţii. **1p**

Pentru orice n de forma $k^2 - 2k$ cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, ecuaţia are soluţiile $x = y = k$. Deoarece expresia $k^2 - 2k = k(k - 2)$ creşte odată cu k, pentru valori diferite ale lui k expresia $k^2 - 2k$ ia valori diferite, prin urmare există o infinitate de numere naturale n (cel puţin cele de forma $k^2 - 2k$) pentru care ecuaţia are soluţii. **1p**

Problema 2. Ana a scris 34 de numere naturale pe câte un cartonaş şi a plasat cartonaşele cu faţa în jos, pe o masă. Într-o mutare, Bogdan poate să întrebe care este paritatea sumei numerelor scrise pe 7 cartonaşe alese de el. Care este numărul minim de mutări după care Bogdan poate determina paritatea sumei tuturor celor 34 de numere scrise pe cartonaşe.

Soluţie. Vom arăta că minimul cerut este 6.

Este evident că Bogdan nu poate afla paritatea sumei numerelor de pe cele 34 de cartonaşe fără ca fiecare cartonaş să fi fost vizat măcar de una din mutările făcute. Vedem astfel că sunt necesare cel puţin 5 mutări. **1p**

Dacă Bogdan face 5 mutări, el va afla informaţii despre 35 de cartonaşe. Atunci fie va exista un cartonaş despre care Bogdan nu are nicio informaţie (şi atunci Bogdan nu are cum să determine paritatea totală), fie cele 35 de cartonaşe vizate de mutările lui Bogdan, cuprind 34 de cartonaşe diferite, unul dintre acestea fiind numit de Bogdan în două mutări diferite. Fie x numărul scris pe cartonaşul numit de Bogdan de două ori în cele 5 mutări ale sale. Fie a, b numere scrise pe câte un cartonaş implicat în prima, respectiv a două mutare care îl implică şi pe x. Dacă am schimba paritatea fiecăruia dintre numerele x, a, b, răspunsurile primite de Bogdan nu se vor schimba (la fiecare din cele două mutări, două cartonaşe si-au schimbat paritatea, deci suma celor 7 numere vizate de respectiva mutare nu şi-a schimbat paritatea). În schimb, suma totală îşi schimbă paritatea (trei termeni, x, a şi b, îşi schimbă paritatea), aşadar Bogdan nu poate şti paritatea sumei totale, deci 5 mutări nu sunt suficiente. **3p**

În continuare demonstrăm că din 6 mutări Bogdan poate determina paritatea sumei totale.

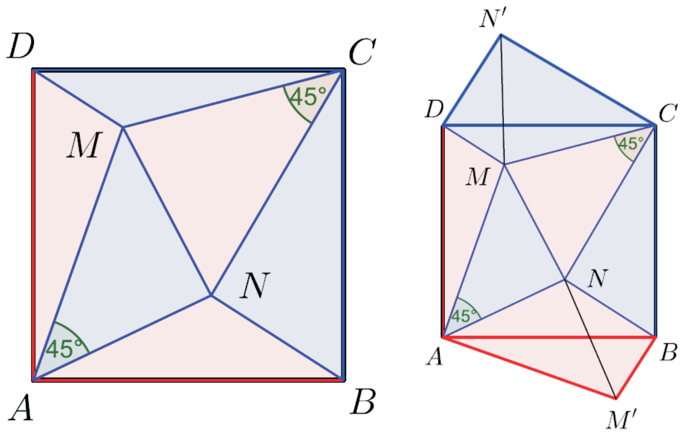
Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{34}$ numerele de pe cele 34 de cartonaşe. Bogdan poate, de exemplu, face mutări astfel încât să afle paritatea sumelor:

1) $s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_7$
2) $s_2 = x_8 + x_9 + \ldots + x_{14}$
3) $s_3 = x_{15} + x_{16} + \ldots + x_{21}$
4) $s_4 = x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$
5) $s_5 = x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$
6) $s_6 = x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$.

Atunci Bogdan cunosşte paritatea sumei $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{30} + 3(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{34} + 2(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34})$, sumă care are aceeaşi paritate ca şi suma numerelor de pe cele 34 de cartonaşe, deci Bogdan cunoaşte paritatea sumei celor 34 de numere. **3p**

Problema 3. În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $m(\angle MAN) = m(\angle MCN) = 45°$, $M \in$Int$(\angle NAD)$. Suprafeţele triunghiurilor MAD, MCN şi NAB se colorează cu roşu, iar suprafeţele triunghiurilor MCD, MAN şi NCB se colorează cu albastru. Arătaţi că suprafaţa colorată cu roşu şi suprafaţa colorată cu albastru au aceeaşi arie. ViitoriOlimpici.ro

Soluţie.



Construim, ca în figura de mai sus (cea din dreapta), în exteriorul pătratului, triunghiurile $\Delta DCN' \equiv \Delta BCN$ şi $\Delta ABM' \equiv \Delta ADM$, cu alte cuvinte ,,rotim" triunghiurile CNB şi AMD cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic, în jurul punctului C, respectiv în jurul punctului A. **2p**

Atunci $m(\angle MCN') = m(\angle MCD) + m(\angle DCN') = m(\angle MCD) + m(\angle BCN) = 90° - m(\angle MCN) = 45°$ şi, analog, $m(\angle NAM') = m(\angle NAM) = 45°$. Cum $CN' = CN$ şi $AM' = AM$ (din construcţie), rezultă că $\Delta MCN' \equiv \Delta MCN$ şi $\Delta NAM' \equiv \Delta NAM$ (L.U.L.). **2p**

De aici rezultă că $MN' = MN = M'N$, deci şi $\Delta MDN' \equiv \Delta M'BN$ (L.L.L.). **1p**

În concluzie, avem că aria suprafeţei albastre (din interiorul pătratului) este

$$\mathcal{A}_{\Delta BCN} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta DCN'} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} =$$

$$\mathcal{A}_{\Delta MCN'} + \mathcal{A}_{\Delta MDN'} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta M'BN} + \mathcal{A}_{\Delta M'AN} =$$

$$\mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AM'B} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AMD},$$

adică egală cu aria suprafeţei roşii din interiorul pătratului. **2p**