Clasa a VI-a

Problema 1. Se consideră numerele naturale $\overline{ab}$, cu a şi b cifre nenule diferite. Care este cel mai mic număr n astfel încât orice mulţime de n astfel de numere conţine două a căror sumă să fie 100?

Soluţie. În primul rând trebuie să aflăm câte numere respectă condiţiile din enunţ (au două cifre nenule, diferite). Cifra zecilor poate fi înlocuită în 9 moduri, iar cifra unităţilor în 8 moduri. Aşadar sunt $9 \times 8 = 72$ de numere. **1p**

Să ne gândim acum la cele mai nefavorabile situaţii:

1. Pot alege numerele 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97 sau 98. Pentru ele nu există numere de două cifre cu care să le adunăm şi să obţinem 100. **1p**

2. Există numerele 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 care dau 100 numai dacă le adun cu numere cu cifre identice (88, 77, 66, 55, 44, 33, 22, respectiv 11). **1p**

Avem aşadar posibilitatea să alegem 16 numere şi să nu găsim două a căror sumă să dea 100. **1p**

Ne rămân încă 56 de numere $(72-16=56)$. Jumătate (28) dintre acestea sunt mai mici sau egale cu 49, cealaltă jumătate (28) sunt mai mari sau egale cu 51. **1p**

O situaţie nefericită ar fi să le aleg pe toate cele mai mici sau egale cu 49.

Cu acestea 28 şi cu cele 16 de mai devreme tot nu găsesc două a căror sumă să fie 100. Dar acum, cu încă un număr din cealaltă grupă sigur găsesc două a căror sumă să fie 100. **1p**

În concluzie, trebuie să alegem 45 de numere $(28+16+1=45)$. **1p**

Problema 2. Se dau numerele $a = \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ori}} + \underbrace{222\ldots2}_{n \text{ ori}} + \cdots + \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ ori}}$, $b = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ ori}}$.

Arătaţi că raportul $\dfrac{a}{3b+n}$ nu depinde de n.

Soluţie. Calculăm pe a.

Avem $a = \underbrace{111...1}_{n \text{ ori}} \cdot (1+2+...+9) = \underbrace{111...1}_{n \text{ ori}} \cdot 45.$ **2p**

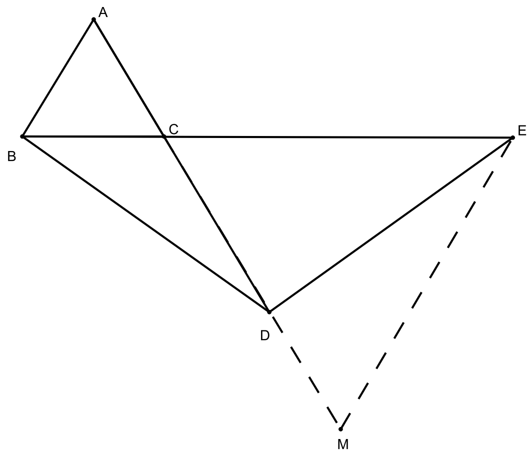
Calculăm $3b+n$. Avem

$$\begin{aligned} 3b+n &= 9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{n \text{ ori}} + (\underbrace{1+1+1+...+1}_{n \text{ ori}}) = \\ &= 10+100+1000+...+1\underbrace{000...0}_{n \text{ ori}} = \underbrace{111...1}_{n \text{ ori}}0 \end{aligned}$$

3p

Acum $\dfrac{a}{3b+n} = \dfrac{\underbrace{111...1}_{n \text{ ori}} \cdot 45}{\underbrace{111...1}_{n \text{ ori}}0} = \dfrac{45}{10} = \dfrac{9}{2}.$ **2p**

Problema 3. Fie triunghiul ABC în care m$(\widehat{C}) = 60°$. Pe prelungirea laturii AC, dincolo de C, se ia punctul D, iar pe prelungirea laturii BC, dincolo de C, se ia punctul E, astfel încât $[BD] \equiv [DE]$. Dacă $[AD] \equiv [CE]$ demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.



Soluţie. Prelungim AD, dincolo de D cu segmentul $[DM] \equiv [AC]$. Vom avea $[CM] \equiv [CE]$. **1p**

$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ECM}$ (opuse la vârf) implică $m(\widehat{ECM}) = 60^0$.

De aici şi din $[CM] \equiv [CE]$ rezultă $\triangle MEC$ este echilateral. **1p**

Acum $\triangle ABD \equiv \triangle MDE$ deoarece:

$[BD] \equiv [DE]$ din ipoteză

$[AD] \equiv [ME]$ ambele fiind congruente cu $[CM]$

$\widehat{BDA} \equiv \widehat{DEM}$ deoarece $m(\widehat{BDA}) = 60^0 - m(\widehat{DBC})$ ($\widehat{ACB}$ este unghi exterior triunghiului BCD), $m(\widehat{DEM}) = 60^0 - m(\widehat{CED})$, iar $\widehat{CBD} \equiv \widehat{CED}$ din ipoteză. **3p**

Din $\triangle ABD \equiv \triangle MDE$ rezultă $[AB] \equiv [MD]$ şu cum $[MD] \equiv [AC]$ obţinem $[AB] \equiv [AC]$. **1p**

De aici deducem că $\triangle ABC$ este isoscel şi cum are un unghi cu măsura de 60^0 $(\widehat{C})$ rezultă că $\triangle ABC$ este echilateral. **1p**