Clasa a V-a

Problema 1. Fie A cel mai mare număr natural format din cifre nenule a căror sumă este 2012. Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui A la 101.

Soluţie. Cel mai mare număr format cu cifre nenule a căror sumă este 2012 este $\underbrace{111...1}_{2012 \text{ ori}}$ **1p**

Observăm că $1111 = 101 \cdot 11$. **2p**

Numărul $\underbrace{111...1}_{2012 \text{ ori}}$ se poate scrie

$$\underbrace{111...1}_{2012 \text{ ori}} = \underbrace{1111 \cdot 10^{2008} + 1111 \cdot 10^{2004} + 1111 \cdot 10^{2000} + ... + 1111 \cdot 10^{4} + 1111}_{503 \text{ ori}}$$

sau

$$\begin{aligned}\underbrace{111...1}_{2012 \text{ ori}} &= \underbrace{1111 \cdot (10^{2008} + 10^{2004} + 10^{2000} + ... + 10^{4} + 1)}_{503 \text{ ori}} \\ &= 101 \cdot 11 \cdot (\underbrace{10^{2008} + 10^{2004} + 10^{2000} + ... + 10^{4} + 1}_{503 \text{ ori}}) \\ &= 101 \cdot 11 \cdot (\underbrace{1000100010001...10001}_{2009 \text{ ori}}) \\ &= 101 \cdot (\underbrace{110011001100...110011}_{2010 \text{ ori}})\end{aligned}$$

3p

Câtul este $\underbrace{110011001100...110011}_{2010 \text{ ori}}$, iar restul este 0. **1p**

Problema 2. Se consideră mulţimea $M = \{7k + 1 \mid 0 \leq k \leq 20,\ k \in \mathbb{N}\}$. Arătaţi că orice submulţime cu 12 elemente a mulţimii M conţine două elemente a căror sumă este 149.

Soluţie. Avem $M = \{1, 8, 15, 22, ..., 134, 141\}$, adică 21 de elemente. **1p**

Observăm, că exceptându-l pe 1, suma a două elemente egal depărtate de capete este 149 $(8 + 141 = 149,\ 15 + 134 = 149, ...,\ 71 + 78 = 149)$ **2p**

Din mulţimea M formăm submulţimile $\{1\}$, $\{8, 141\}$, $\{15, 134\}$, ..., $\{71, 78\}$ Sunt 11 submulţimi. **2p**

Trebuie să formăm o submulţime cu 12 elemente. Conform principiului cutiei (cutiile sunt cele 11 submulţimi construite anterior) cel puţin dintr-o submulţime trebuie să luăm ambele elemente. În concluzie vom avea două elemente cu suma 149. **2p**

Problema 3. Se consideră zece numere naturale nenule, distincte, mai mici decât 89. Arătaţi că se pot alege trei dintre acestea, a, b, c, astfel încât $a < b < c$ şi $a + b > c$.

Soluţie. Fie $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{10}$ numerele date, în ordine crescătoare,

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{10} < 89$$

1p

Presupunem că niciun triplet nu verifică relaţia $a + b > c$ **1p**

Atunci $a_3 \geq a_1 + a_2$ adică

$$a_3 \geq 1 + 2; \quad a_3 \geq 3$$

$a_4 \geq a_2 + a_3$ adică

$$a_4 \geq 2 + 3; \quad a_4 \geq 5$$

$a_5 \geq a_3 + a_4$ adică

$$a_5 \geq 3 + 5; \quad a_5 \geq 8$$

$a_6 \geq a_4 + a_5$ adică

$$a_6 \geq 5 + 8; \quad a_6 \geq 13$$

$a_7 \geq a_5 + a_6$ adică

$$a_7 \geq 8 + 13; \quad a_7 \geq 21$$

$a_8 \geq a_6 + a_7$ adică

$$a_8 \geq 13 + 21; \quad a_8 \geq 34$$

$a_9 \geq a_7 + a_8$ adică

$$a_9 \geq 21 + 34; \quad a_9 \geq 55$$

$a_{10} \geq a_8 + a_9$ adică

$$a_{10} \geq 34 + 55; \quad a_{10} \geq 89$$

4p

Dar, din ipoteză, $a_{10} < 89$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă.

În concluzie, există trei numere $a,\ b$ şi c astfel încât $a < b < c$ şi $a + b > c$.

1p