Clasa a XII-a

Problema 1. Fie A un inel cu proprietatea că pentru orice elemente $a, b \in A$ au loc egalităţile $(a+b)^2 = a^2+b^2$ şi $(a+b)^3 = a^3+b^3$. Arătaţi că:

i) $a^2 \in Z(A)$(centrul inelului A), $\forall a \in A$.

ii) $ab(a+b) = 0$, $\forall a, b \in A$.

iii) $(a+b)^n = a^n + b^n$, $\forall a, b \in A$.

Soluţie. Din relaţiile din enunţ rezultă imediat că

$$ab + ba = 0 \quad \text{şi} \quad a^2b + b^2a = 0$$

pentru orice $a, b \in A$. Atunci

$$a^2b = -aba = ba^2\,,\ \forall a, b \in A\,,$$

astfel că $a^2 \in Z(A)$, $\forall a \in A$. De asemenea,

$$ab(a+b) = aba + ab^2 = -a^2b - b^2a = 0,\ \forall a, b \in A.$$

Ultima afirmaţie o demonstrăm prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$. Conform enunţului, ea este adevărată pentru $1 \leq n \leq 3$. Să presupunem că ea este adevărată pentru orice întreg pozitiv $m < n$ şi să o demonstrăm pentru numărul $n \geq 4$. Dacă $n = 2k$ este un număr par, atunci conform ipotezei de inducţie avem că:

$$(a+b)^n = \left((a+b)^2\right)^k = (a^2+b^2)^k = a^{2k} + b^{2k} = a^n + b^n \quad ,\ \forall a, b \in A.$$

Dacă $n = 2k+1$ este impar, atunci

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)^{k+1}(a+b)^k = (a^{k+1}+b^{k+1})(a^k+b^k) = \\ &= a^{2k+1} + b^{2k+1} + a^{k+1}b^k + b^{k+1}a^k = \\ &= a^n + b^n + a^k(a+b)b^k = a^n + b^n \quad ,\ \forall a, b \in A.\end{aligned}$$

Problema 2. Fie $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty)$ o funcţie integrabilă. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Soluţie. Notăm $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, $b_n = \ln(a_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ şi calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Folosind inegalitatea $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, $\forall x \geq 0$, avem că

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq n,$$

de unde prin însumare obţinem:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \le b_n \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 f(x)\,dx$. Obţinem atunci că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

Problema 3. Fie $p \ge 3$ un număr prim, a un întreg nenul şi polinomul $f = X^p - X + a$. Arătaţi că:

i) Polinomul f are o singură rădăcină reală x_0.

ii) Dacă p nu divide a, numărul x_0 este iraţional.

iii) Numărul x_0 este raţional dacă şi numai dacă există $b \in \mathbb{Z}$, $|b| \ge 2$, astfel încât $a = b^p - b$.

Soluţie. i) Utilizăm şirul lui Rolle. Polinomul derivat $f' = pX^{p-1} - 1$ are rădăcinile $x_1 = -\frac{1}{\sqrt[p-1]{p}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[p-1]{p}}$. Valorile lui f în punctele x_1 şi x_2 sunt:

$$f(x_1) = \frac{p-1}{p\sqrt[p-1]{p}} + a\,, \quad f(x_2) = -\frac{p-1}{p\sqrt[p-1]{p}} + a.$$

Deoarece $\frac{p-1}{p\sqrt[p-1]{p}} \in (0,1)$, iar $|a| \ge 1$, rezultă că $\operatorname{sgn}(f(x_1)) = \operatorname{sgn}(f(x_2)) = \operatorname{sgn}(a)$. Obţinem că f are o singură rădăcină reală x_0.

ii) Deoarece $f \in \mathbb{Z}[X]$ este monic, astfel că dacă $x_0 \in \mathbb{Q}$, atunci $x_0 \in \mathbb{Z}$ şi $a = -(x_0^p - x_0)$ este multiplu de p. Prin contrapoziţie obţinem atunci afirmaţia dorită.

iii) Dacă $x_0 \in \mathbb{Q}$, atunci $x_0 \in \mathbb{Z}$ şi $|x_0| \ge 2$, căci altfel $a = 0$. Obţinem că $a = -(x_0^p - x_0) = b^p - b$, unde $b = -x_0 \in \mathbb{Z}$, cu $|b| \ge 2$.

Reciproc, dacă $a = b^p - b$, cu $b \in \mathbb{Z}$, $|b| \ge 2$, atunci $f = X^p - X + b^p - b$, astfel că $f(-b) = 0$ şi $x_0 = -b \in \mathbb{Q}$.