Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $A = (a_n)_{n \geqslant 0}$ şi $B = (b_n)_{n \geqslant 0}$ şiruri de numere reale pozitive, astfel încât pentru fiecare $n \geqslant 1$ să avem

$$2a_n + a_{n+1} \leqslant b_n \leqslant a_n + 2a_{n-2}.$$

Arătaţi că şirul A este convergent dacă şi numai dacă şirul B este convergent.

Soluţie. Afirmaţia ,,A convergent $\Rightarrow$ B convergent este imediată, din teorema cleştelui.

Presupunem acum B convergent. Aceasta atrage mărginirea şirului A, deoarece B este mărginit şi $2a_n \leqslant b_n$.

Fie acum L şi l limita superioară, respectiv inferioară a şirului A şi fie b limita şirului B. Fie $(a_{n_k})_k$ un subşir convergent la L. Din prima inegalitate avem

$$2L + \liminf a_{n_k+1} \leqslant \liminf(2a_{n_k} + a_{n_k+1}) \leqslant \lim b_{n_k} = b,$$

de unde $2L + l \leqslant b$.

În acelaşi mod, alegând un subşir $(a_{m_k})_k$ convergent la l, a doua inegalitate ne dă $b = \lim b_{m_k} \leqslant \limsup(a_{m_k} + 2a_{n_k-2}) \leqslant l + 2L$.

Din cele două inegalităţi obţinute avem că $2L + l \leqslant L + 2l$, adică$L \leqslant l$, deci $L = l$, demonstrând astfel convergenţa şirului A.

Problema 2. Asociem fiecărei funcţii mărginite $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcţia $S_f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $S_f(x) = \sup\limits_{t \in [0,x]} f(t)$.

a) Arătaţi că, dacă f este continuă pe $[0,1]$, atunci S_f este continuă pe $[0,1]$.

b) Este adevărat că, dacă S_f este strict crescătoare, atunci f este strict crescătoare?

c) Este adevărat că, dacă f este derivabilă pe $[0,1]$, atunci S_f este derivabilă pe $[0,1]$?

Soluţie. a) Este evident că S_f este crescătoare, deci limitele laterale există în orice punct x_0 şi $S_f(x_0 - 0) \leqslant S_f(x_0) \leqslant S_f(x_0 + 0)$.

Dacă, de exemplu, $S_f(x_0 - 0) < S_f(x_0)$, atunci luăm $a \in (S_f(x_0 - 0), S_f(x_0))$ şi avem $f(x) < a$, $\forall x < x_0$ deci $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) \leqslant a < f(x_0)$ – contradicţie.

b) Nu. Luăm, de exemplu, $f(x) = x$ dacă $x \in \mathbb{Q}$ şi $f(x) = 0$ dacă $x \notin \mathbb{Q}$.

c) Nu. Luăm, de exemplu, $f(x) = 1$ dacă $x \in [0,\ 1/4]$ şi $f(x) = \ |2 - 4x|$ dacă $x \in (1/4,\ 1]$. Atunci $S_f(x) = 1$ dacă $x \in [0,\ 3/4]$ şi $S_f(x) = 4x - 2$ dacă $x \in (3/4,\ 1]$, funcţie care nu este derivabilă în $3/4$.

Problema 3. Vom spune că matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este *corelată* cu matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dacă $AB = BA$, $\det(A) - \det(B) = 1$ şi $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$.

a) Arătaţi că, dacă matricea A este corelată cu B, atunci $\det(A-B) = 3$.

b) Arătaţi că există o matrice corelată cu I_3.

Soluţie. a) Considerăm funcţia polinomială reală dată de $P(x) = \det(A+Bx)$. Prin calculare directă obţinem

$$P(x) = \det(A) + \det(B)x^3 + ax + bx^2, \tag{1}$$

unde a şi b sunt numere întregi.

Relaţia $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$ se scrie $\det(A + B\varepsilon)\det(A + B\bar{\varepsilon}) = 0$, sau $P(\varepsilon)P(\bar{\varepsilon}) = 0$ (unde $\varepsilon = \cos\pi/3 + \mathrm{i}\sin\pi/3$). Deoarece $P(\varepsilon) = \overline{P(\bar{\varepsilon})}$, rezultă $P(\varepsilon) = P(\bar{\varepsilon}) = 0$. Deducem

$$0 = P(\varepsilon) = \det(A) - \det(B) + a\varepsilon + b\varepsilon^2 = \det(A) - \det(B) + \frac{a-b}{2} + \mathrm{i}\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2},$$

deci $a = -b = -1$. De aici rezultă $\det(A - B) = P(-1) = \det A - \det B - a + b = 3$.

b) În relaţia (1) avem $a = \mathrm{tr}\,(A^*)$, $b = \mathrm{tr}(A)$. Pentru a obţine un exemplu putem lua $\det(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 1$, $\mathrm{tr}(A^*) = -1$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.