Clasa a X-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care se poate construi o mulţime de numere complexe A, de cardinal n, cu proprietăţile:

(i) $|z| = 1$, oricare ar fi $z \in A$;

(ii) $\sum\limits_{z \in A} z = 0$;

(iii) $z + w \neq 0$, oricare ar fi $z, w \in A$.

Soluţie. Evident, valorile $n = 1$ şi $n = 2$ nu convin.

Orice număr impar $n \geq 3$ este bun: alegem $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. **2p**

Valoarea $n = 4$ nu convine: dacă $A = \{a; b; c; d\}$, atunci a, b, c, d vor fi afixele vârfurilor unui patrulater inscriptibil. Condiţia $a+b+c+d = 0$ arată că patrulaterul este dreptunghi, ceea ce contrazice proprietatea (iii). **2p**

Orice număr par $n \geq 6$ este bun: alegem $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-3} = 1\} \cup \{wz \mid z^3 = 1\}$, unde $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$, cu $\alpha \notin \{r\pi \mid r \in \mathbb{Q}\}$. În concluzie, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$. **3p**

Problema 2. a) Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătaţi că discurile având ca diametre laturile AB, BC, CD şi DA acoperă în întregime interiorul patrulaterului $ABCD$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

b) Fie $ABCD$ un patrulater. Demonstraţi că discurile având ca diametre segmentele AB, AC şi AD acoperă în întregime interiorul triunghiului BCD.

Soluţie. a) Fie M un punct în interiorul patrulaterului $ABCD$; atunci

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360°.$$

Rezultă că cel puţin unul dintre cele patru unghiuri are măsura de măcar $90°$. Dacă $\angle AMB$ este un astfel de unghi, M aparţine discului de diametru AB şi, de aici, cerinţa problemei. **3p**

b) Notăm cu P, Q şi R proiecţiile vârfului A pe dreptele BC, CD respectiv DB. Indiferent de natura patrulaterului $ABCD$ (convex sau concav), patrulaterele de vârfuri $BPAR$, $CPAQ$ şi $DQAR$ sunt înscrise în cercurile de diametre AB, AC respectiv AD şi, împreună cu interioarele lor, acoperă interiorul triunghiului BCD. Cu att mai mult, discurile având ca diametre segmentele AB, AC şi AD vor acoperi interiorul triunghiului BCD. **4p**

Problema 3. Se dau m numere naturale distincte din mulţimea $\{1; 2; ...; n\}$. Demonstraţi că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, astfel încât

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Adrian Zahariuc

Soluţie. Fie $a_1 < a_2 < ... < a_m$ cele m numere date. Notăm cu j indicele minim pentru care $a_1 + a_2 + ... + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$ şi cu i indicele maxim pentru care $a_i + a_{i+1} + ... + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$. Notând $S = a_i + a_{i+1} + ... + a_j$, este îndeplinită prima dintre condiţiile dorite. **2p**

Din maximalitatea lui i, avem $S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1$. (1)

Din minimalitatea lui j, deducem că

$$a_1 + a_2 + ... + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + ... + a_j \Rightarrow$$

$$a_j > a_1 + ... + a_{i-1} \geq 1 + 2 + ... + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Însă $n - 1 \geq a_j$, prin urmare $i \leq \sqrt{2n} + 1$. Rezultă că $a_i \leq n - m + i \leq n - m + \sqrt{2n} + 1$. (2) Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că, pentru S, este îndeplinită şi a doua dintre condiţiile dorite. **5p**