Pregătire IMAR-Emag, Partea a doua, 20 noiembrie 2013

1. Un număr finit dintre pătratele reţelei infinite $\mathbb{Z}^2$ se colorează cu negru astfel încât pătratele negre au 0,2 sau 4 vecini (dintre cei 4 vecini) necoloraţi. Demonstraţi că pătratele necolorate pot fi colorate cu roşu şi albastru astfel încât fiecare pătrat negru să aibă un număr egal de vecini roşii şi albaştri.

2. Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil fără laturi paralele şi fie O centrul cercului înscris. Arătaţi că O este punctul de intersecţie al dreptelor ce unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului dacă şi numai dacă $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

3. Laturile paralelipipedelor $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ sunt paralele cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz. Este posibil ca P_2 să intersecteze celelalte paralelipipede mai puţin P_1 şi P_3, P_3 să intersecteze celelalte mai puţin P_2 şi P_4, $\ldots$,P_{12} să le intersecteze pe celelalte mai puţin P_{11} şi P_1 iar P_1 să intersecteze restul mai puţin P_{12} şi P_2?

4. Fie D un domeniu convex în plan şi pentru $n \geq 3$ notăm cu A_n aria minimă a unui poligon cu n laturi circumscris lui D. Arătaţi că

$$A_n \leq \frac{A_{n-1} + A_{n+1}}{2}.$$

5. Fie D un domeniu convex în plan şi fie S_n aria maximă a unui poligon cu n laturi înscris în D. Atunci

$$S_n \geq \text{aria}(D)\,\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n},$$

cu egalitate dacă D este elipsă.

6. Fie $f_2(n), f_3(n)$ numărul maxim posibil de distanţe maxime într-o configuraţie de n puncte în plan, respectiv în spaţiu. Arătaţi că $f_2(n) = n, f_3(n) = 2n - 2$.

culegerea RG