Pregătire IMAR-Emag, 13 noiembrie 2013

1. Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC ce nu aparţine medianei din A astfel încât $\angle CAP = \angle BCP$. BP şi CA se taie în B' iar CP şi AB în C'. Fie Q al doilea punct de intersecţie al dreptei AP cu cercul circumscris triunghiului ABC, R punctul de intersecţieal dreptelor$B'Q$ şi CC' iar S punctul de intersecţie al dreptei $B'Q$ cu dreapta ce trece prin P şi este paralelă cu AC. Presupunem că dreptele $B'C'$ şi QB se intersectează în T ce este de cealaltă parte a liniei AB decât C Arătaţi că $\angle BAT = \angle BB'Q$ dacă şi numai dacă $SQ = RB'$.

2. Fie K mulţimea laturilor şi diagonalelor unui poligon convex cu n laturi. Spunem că o submulţime din K este intersectabilă dacă orice pereche de segmente din ea se intersectează. Care este maximul posibil de elemente ale reuniunii a două mulţimi intersectabile?

3. Se dau n cercuri în plan şi pentru oricare două se trasează toate tangentele comune. Se observă că laturile unui poligon regulat cu 2011 laturi se găsesc pe aceste drepte. Care este valoarea minimă a lui n?

4. Fie ABC un triunghi scalen, M este mijlocul laturii BC şi fie N mijlocul arcului BAC al cercului circumscris iar prin I_1 şi I_2 notăm centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABM respectiv ACM. Demonstraţi că punctele $I_1, I_2, , A, N$ sunt conciclice.

5. Fie M mijlocul laturii AB a triunghiului ascuţitunghic ABC şi fie P şi Q pricioarele înălţimilor din A respectiv B. Arătaţi că dacă cercul circumscris tirunghiului BMP etse tangent dreptei AC atunci cercul circumscris triunghiului AMQ este tangent laturii BC.

6. (Szemeredi) Fie A o mulţime de n puncte din plan, oricare trei necoliniare. Arătaţi că există un punct $p \in A$astfel încât numărul de distanţe distincte de la p la celelalte puncte ste cel puţin $\lceil (n-1)/3 \rceil$.

7. Fie C un disc de rază r tangent la cel puţin şase discuri cu interioare disjuncte şi de raze $r_1, r_2, \ldots, r_k$ $(k \geq 6)$. atunci

$$r \geq \frac{k}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i}},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $k = 6$ şi $r = r_1 = r_2 = \cdots = r_6$.

Culegerea RG