Testul 5

Problema 1. Fie ABC un triunghi şi fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Dreptele OA şi BC se intersectează în punctul M; punctele N şi P sunt definite în mod analog. Tangenta în A la cercul ABC intersectează dreapta NP în punctul X; punctele Y şi Z sunt definite în mod analog. Arătaţi că punctele X, Y, Z sunt coliniare.

Problema 2. Fie m un număr natural nenul şi fie A, respectiv B, un alfabet cu m, respectiv $2m$, litere. Fie n un număr par mai mare sau egal cu $2m$. Fie a_n numărul de cuvinte de lungime n, formate cu litere din A, în care apar toate literele din A, fiecare de un număr par de ori. Fie b_n numărul de cuvinte de lungime n, formate cu litere din B, în care apar toate literele din B, fiecare de un număr impar de ori. Determinaţi raportul b_n/a_n.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi fie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Determinaţi

$$\max_{0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left|x_k - \frac{2k-1}{2n}\right|\right).$$