Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Al cincilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 5 iunie 2014

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_n^2}.$$

Arătaţi că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$, se pot alege k dintre numerele x_1, x_2, ..., x_n astfel încât suma lor să fie cel puţin egală cu k.

Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia

$$5^m + n^2 = 3^p.$$

Problema 3. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC. Un diametru arbitrar intersectează laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$ în punctele D şi E. Dacă F şi G sunt mijloacele segmentelor $[BE]$, respectiv $[CD]$, arătaţi că $\widehat{FOG} \equiv \widehat{BAC}$.

Problema 4. Pe fiecare din laturile de lungime $n \geq 1$ ale unui triunghi echilateral se consideră câte $n-1$ puncte care împart laturile în n segmente egale. Prin aceste puncte se duc paralele la laturile triunghiului, obţinându-se o reţea de triunghiuri echilaterale de latură 1. Pe fiecare dintre vârfurile triunghiurilor mici se aşază câte o monedă cu stema în sus. O mutare constă în a întoarce trei monede adiacente (care se află în vârfurile unui triunghi echilateral de latură 1).

Determinaţi valorile lui n pentru care este posibil ca după un anumit număr de mutări toate monedele să se afle cu stema în jos.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.