Testul 4

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Tangentele la cercul ABC în punctele B şi C se intersectează în punctul P. Cercul de centru P şi rază PB intersectează bisectoarea interioară a unghiului BAC în punctul Q, situat în interiorul triunghiului ABC, iar dreptele BC şi OQ se intersectează în punctul D. Fie E şi F proiecţiile ortogonale ale punctului Q pe dreptele AC, respectiv AB. Arătaţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente.

Problema 2. Fie p un număr prim impar. Determinaţi polinoamele f şi g din $\mathbb{Z}[X]$, care îndeplinesc condiţia

$$f(g(X)) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi fie S_n mulţimea permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru fiecare permutare σ din S_n, fie $I(\sigma) = \{i\colon \sigma(i) \leq i\}$. Calculaţi suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{|I(\sigma)|} \sum_{i \in I(\sigma)} (i + \sigma(i)).$$