Al patrulea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 3 iunie 2014

Problema 1. Numim *drăguţ* un număr natural compus n care are proprietatea că divizorii săi mai mari ca 1 pot fi scrişi pe un cerc astfel încât oricare două numere alăturate nu sunt relativ prime. Aflaţi câte numere drăguţe conţine mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 100\}$.

Soluţie. Vom arăta că numerele drăguţe sunt numerele compuse care nu se pot scrie sub forma pq, unde p şi q sunt numere prime distincte.

Dacă $n = pq$, atunci nu putem aşeza pe un cerc numerele p, q şi pq fără ca p şi q să fie alăturate, deci pq nu este drăguţ.

Dacă n nu este de forma pq, atunci $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, unde $k \geq 1$ şi $\alpha_i \geq 1$. O configuraţie convenabilă este următoarea: se scriu numerele pe cerc într-o succesiune de forma:

$$n, S_1, S_2, ..., S_{k-1}, S_k$$

unde:

- S_1 este o secvenţă de numere care cuprinde toţi divizorii proprii ai lui n care sunt multipli de p_1, ultimul număr din secvenţă fiind $p_1 p_2$;
- S_2 este o secvenţă de numere care cuprinde toţi divizorii lui n care se divid cu p_2 şi nu se divid cu p_1, ultimul număr din secvenţă fiind $p_2 p_3$;
- S_3 este o secvenţă de numere care cuprinde toţi divizorii lui n care se divid cu p_3 şi nu se divid nici cu p_1, nici cu p_2, ultimul număr din secvenţă fiind $p_3 p_4$;

....

- S_k este o secvenţă de numere care cuprinde toţi divizorii lui n care se divid cu p_k şi nu se divid cu niciunul din numerele $p_1, p_2, ..., p_{k-1}$.

În mulţimea $\{1, 2, ..., 100\}$ sunt 74 de numere compuse, dintre care 30 de forma pq, cu p, q prime distincte şi 44 de numere drăguţe.

Problema 2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Aflaţi cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care este adevărată afirmaţia:

dacă există n sume de forma $x_p + x_q + x_r$ $(1 \leq p < q < r \leq 5)$ egale cu 0, atunci
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$

[* * *]

Soluţie. Pentru $n = 6$ afirmaţia este falsă, un exemplu fiind $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = -2$. Toate cele 6 sume care conţin pe x_5 sunt egale cu 0.

Pentru $n = 7$ vom arăta că afirmaţia este adevărată. În total, în cele 7 sume nule, apar 21 de termeni, deci unul dintre numerele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 apare în cel puţin cinci dintre sume; fie acesta x_1. Sunt 6 sume de forma $x_1 + x_q + x_r$, $2 \leq q < r \leq 5$, cinci dintre acestea fiind aşadar nule. Să presupunem că

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_4 = x_1 + x_2 + x_5 = x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_3 + x_5 = 0.$$

Rezultă $x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Deoarece printre cele 7 sume nule există (cel puţin) una care nu îl conţine pe x_1 ca termen, rezultă $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ şi apoi $x_1 = 0$.

Problema 3. Fie $n \geq 5$ un număr natural. Arătaţi că n este prim dacă şi numai dacă pentru orice scriere a lui n ca suma a patru numere naturale nenule $n = a + b + c + d$ are loc relaţia $ab \neq cd$.

[* * *]

Soluţie. Enunţul este echivalent cu a spune că un număr natural $n \geq 5$ este compus dacă şi numai dacă există o scriere a sa ca suma a patru numere naturale nenule a, b, c, d astfel încât $ab = cd$.

$(\Rightarrow)$ Dacă $n = pq$, cu $p, q \geq 2$, este un număr compus, putem alege $a = (p-1)(q-1)$, $b = 1$, $c = p - 1$, $d = q - 1$.

($\Leftarrow$) Dacă $ab = cd$ şi $n = a + b + c + d$, atunci

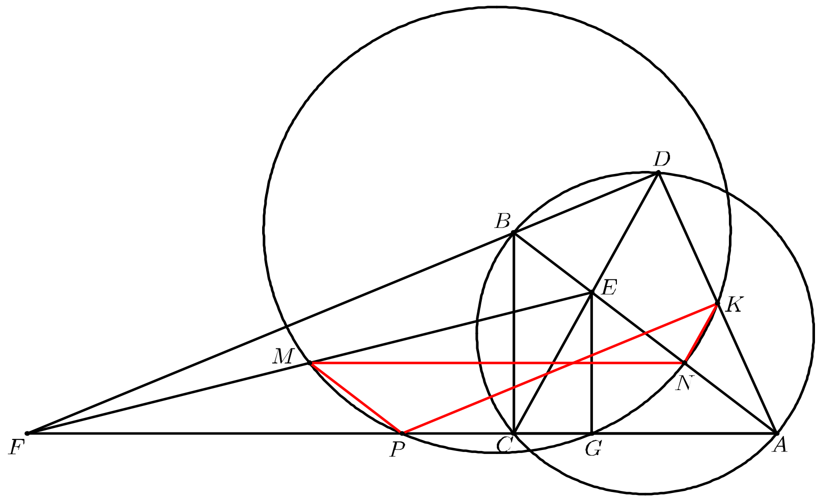
$$an = a^2 + ab + ac + ad = a^2 + cd + ac + ad = (a + c)(a + d),$$

deci $n \mid (a + c)(a + d)$.

Presupunând că n ar fi prim, ar rezulta că $n \mid a + c$ sau $n \mid a + d$, relaţii care nu pot avea loc, întrucât $n > a + c$ şi $n > a + d$.

Problema 4. Într-un cerc se consideră două coarde $[AB]$ şi $[CD]$ care se intersectează în punctul E. Dreptele AC şi BD se taie în punctul F. Fie G proiecţia lui E pe dreapta AC. Se notează cu M mijlocul segmentului $[EF]$, cu N mijlocul segmentului $[EA]$ şi cu K mijlocul segmentului $[AD]$. Demonstraţi că punctele M, N, K, G sunt conciclice.

Marius Bocanu



Soluţie. Fie P mijlocul lui $[AF]$; atunci punctele N, G, P, M sunt pe cercul Euler al triunghiului AEF, deci sunt conciclice. $(*)$

Deoarece $NK \parallel DE$ şi $NM \parallel AF$, avem:

$$m(\widehat{KNM}) = m(\widehat{KNE}) + m(\widehat{ENM}) = m(\widehat{DEB}) + m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DEB}) + m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{ABF}),$$

iar cum $KP \parallel DF$ şi $MP \parallel AE$, avem

$$m(\widehat{KPM}) = 180^\circ - m(\widehat{KPA}) - m(\widehat{MPF}) = 180^\circ - m(\widehat{DFA}) - m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{ABF}).$$

Rezultă că patrulaterul $KNPM$ este inscriptibil, deci punctele K, N, P, M sunt conciclice. Ţinând cont de relaţia $(*)$ se obţine concluzia problemei.