Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Al patrulea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 3 iunie 2014

Problema 1. Numim *drăguţ* un număr natural compus n care are proprietatea că divizorii săi mai mari ca 1 pot fi scrişi pe un cerc astfel încât oricare două numere alăturate nu sunt relativ prime.

Aflaţi câte numere drăguţe conţine mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 100\}$.

Problema 2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Aflaţi cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care este adevărată afirmaţia:

dacă există n sume de forma $x_p + x_q + x_r$ $(1 \leq p < q < r \leq 5)$ egale cu 0, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Problema 3. Fie $n \geq 5$ un număr natural. Arătaţi că n este prim dacă şi numai dacă pentru orice scriere a lui n ca suma a patru numere naturale nenule $n = a + b + c + d$ are loc relaţia $ab \neq cd$.

Problema 4. Într-un cerc se consideră două coarde $[AB]$ şi $[CD]$ care se intersectează în punctul E. Dreptele AC şi BD se taie în punctul F. Fie G proiecţia lui E pe dreapta AC. Se notează cu M mijlocul segmentului $[EF]$, cu N mijlocul segmentului $[EA]$ şi cu K mijlocul segmentului $[AD]$. Demonstraţi că punctele M, N, K, G sunt conciclice.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.