Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2014

Problema 1. Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 0$ astfel încât $abc + bcd + cda + dab = 4$ are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4.$$

[∗ ∗ ∗]

Soluţie. Avem succesiv:

$$\begin{aligned} 4 &= abc + bcd + cda + dab = ab(c+d) + cd(a+b) \leq \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \sqrt{2(c^2+d^2)} + \frac{c^2+d^2}{2} \cdot \sqrt{2(a^2+b^2)} = \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}} \right) \leq \frac{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}{2} \cdot \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}, \end{aligned}$$

adică $4 \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)^3}$, de unde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$.

Problema 2. Determinaţi numerele prime p şi q care verifică egalitatea:

$$p^3 + 107 = 2q(17q + 24).$$

Lucian Petrescu

Soluţie. Pentru $q = 2$ obţinem $p = 5$, care este prim, iar pentru $q \geq 3$, reducând modulo 4, rezultă $p^3 \equiv 3 \pmod 4$, de unde $p \equiv 3 \pmod 4$.

Ecuaţia se rescrie $p^3 + 125 = 34q^2 + 48q + 18$, sau, echivalent,

$$(p+5)\left(p^2 - 5p + 25\right) = 2\left[q^2 + (4q+3)^2\right].$$

Întrucât $p^2 - 5p + 25 \equiv 3 \pmod 4$, numărul $p^2 - 5p + 25$ are un divizor prim $d \equiv 3 \pmod 4$ şi, deoarece $d \mid q^2 + (4q+3)^2$, rezultă $d \mid q$ şi $d \mid 4q + 3$. Ca urmare, $d \mid 3$, deci $d = q = 3$ şi atunci $p = 7$, care este prim. Aşadar ecuaţia are soluţiile $(p, q) \in \{(5, 2), (7, 3)\}$.

Problema 3. Fie numerele naturale $n \geq m \geq 4$ şi $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ o submulţime a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ cu proprietatea:

pentru orice $a, b \in A$, $a \neq b$, dacă $a + b \leq n$, atunci $a + b \in A$.

Arătaţi că:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

[∗ ∗ ∗]

Soluţie. Presupunem că $a_1 < a_2 < ... < a_m$.

Dacă m este par, putem grupa elementele lui A în perechi de forma (a_i, a_{m+1-i}), cu $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$. Vom demonstra că suma numerelor din fiecare pereche este cel puţin $n + 1$. Presupunând contrariul, ar exista un i pentru care $a_i + a_{m+1-i} \leq n$. Cum $i < m + 1 - i$, următoarele i numere distincte

$$a_1 + a_{m+1-i} < a_2 + a_{m+1-i} < \ ... < a_i + a_{m+1-i}$$

trebuie să aparţină mulţimii $\{a_{m+2-i}, a_{m+3-i}, ..., \ a_m\}$, care are numai $i - 1$ elemente, contradicţie. Adunând relaţiile

$$a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2},$$

şi împărţind cu m, obţinem concluzia.

Pentru $m = 2k-1$, se arată ca mai sus că $a_i + a_{m+1-i} \geq n+ 1,\ 1 \leq i \leq k-1$.

Vom arăta că $a_k \geq \dfrac{n+1}{2}$. Presupunând contrariul, următoarele $2k+1$ numere:

$$a_1 < a_2 < a_1 + a_2 < ... < a_1 + a_k < a_2 + a_k < ... < a_{k-1} + a_k$$

sunt cel mult egale cu n, deci aparţin lui A, prin urmare ele sunt $a_1, a_2, ...$, respectiv a_m.

Atunci $a_3 = a_1 + a_2,\ \ a_4 = a_1 + a_3 = 2a_1 + a_2\ ,\ \ ...,\ \ \ a_{k-1} = a_1 + a_{k-2} = (k-3)\,a_1 + a_2$, şi, ca urmare,

$$a_k = (k-2)a_1 + a_2.$$

Pe de altă parte, $a_1 + a_{2k-1} \geq n+1$, adică

$$n+1 \leq a_1 + a_{k-1} + a_k = a_1 + (k-3)\,a_1 + a_2 + (k-2)a_1 + a_2 = (2k-4)\,a_1 + 2a_2 = 2a_k,$$

ceea ce conduce la $a_k \geq \dfrac{n+1}{2}$, contradicţie cu presupunerea făcută.

Adunând relaţiile $a_i + a_{m+1-i} \geq n+ 1,\ 1 \leq i \leq k-1$ şi $a_k \geq \dfrac{n+1}{2}$, se obţine concluzia.

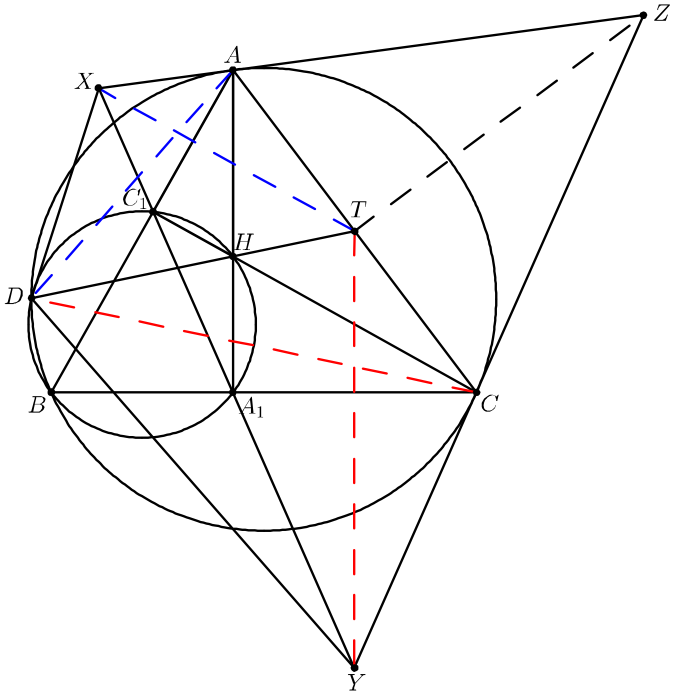
Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC cu $AB \neq BC$, se notează cu T mijlocul lui $[AC]$, iar cu A_1 şi C_1 picioarele înălţimilor din A, respectiv C. Fie Z punctul de intersecţie al tangentelor în A şi C la cercul circumscris triunghiului ABC, X intersecţia dreptelor ZA şi A_1C_1 şi Y intersecţia dreptelor ZC şi A_1C_1.

a) Arătaţi că T este centrul cercului înscris în triunghiul XYZ.

b) Se notează cu H ortocentrul triunghiului ABC şi cu D al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi A_1BC_1. Demonstraţi că punctele T, H şi D sunt coliniare.

c) Arătaţi că punctul D se află pe cercul circumscris triunghiului XYZ.

Marius Bocanu



Soluţie. a) Deoarece $AZ = ZC$, mediana $[ZT]$ e bisectoare. Apoi $\widehat{XAB} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BC_1A_1} \equiv \widehat{AC_1X}$ şi $AT = C_1T$, deci X şi T sunt pe mediatoarea lui $[AC_1]$. Rezultă că $(XT$ e bisectoarea unghiului YXZ.

b) Putem presupune $AB < BC$; atunci D se află pe arcul mic AB. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi L mijlocul lui $[BH]$. Atunci $BD \perp DH$, $BD \perp OL$ (axa radicală e perpendiculară pe linia centrelor), iar $OL \parallel HT$ ($OLHT$ e paralelogram), de unde rezultă că punctele D, H, T sunt coliniare.

c) Patrulaterul $ATDX$ este inscriptibil pentru că:

$$m(\widehat{ADT}) = m(\widehat{BDA}) - m(\widehat{BDH}) = 180^\circ - m(\widehat{ACB}) - 90^\circ = 90^\circ - m(\widehat{XAB}) = m(\widehat{AXT}).$$

La fel ca la punctul a), se arată că TY este mediatoarea segmentului $[A_1C]$. Deoarece:

$$m(\widehat{CDT}) = m(\widehat{HDB}) - m(\widehat{CDB}) = 90^\circ - m(\widehat{CAB}) = 90^\circ - m(\widehat{BCY}) = m(\widehat{CYT}),$$

rezultă că patrulaterul $CTDY$ este inscriptibil. Atunci:

$$\begin{aligned} m(\widehat{XDY}) + m(\widehat{XZY}) &= m(\widehat{XDT}) + m(\widehat{TDY}) + m(\widehat{XZY}) = \\ &= 180^\circ - m(\widehat{XAT}) + 180^\circ - m(\widehat{TCY}) + m(\widehat{XZY}) = \\ &= m(\widehat{ZAT}) + m(\widehat{ZCT}) + m(\widehat{XZY}) = \\ &= 180^\circ, \end{aligned}$$

deci patrulaterul $DXZY$ este inscriptibil, adică D se află pe cercul circumscris triunghiului XYZ.