Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 15 mai 2014

Problema 1. Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 0$ astfel încât $abc + bcd + cda + dab = 4$ are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4.$$

Problema 2. Determinaţi numerele prime p şi q care verifică egalitatea:

$$p^3 + 107 = 2q\left(17q + 24\right).$$

Problema 3. Fie numerele naturale $n \geq m \geq 4$ şi $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ o submulţime a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ cu proprietatea:

pentru orice $a, b \in A$, $a \neq b$, *dacă* $a + b \leq n$, *atunci* $a + b \in A$.

Arătaţi că:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq BC$, se notează cu T mijlocul lui $[AC]$, iar cu A_1 şi C_1 picioarele înălţimilor din A, respectiv C. Fie Z punctul de intersecţie al tangentelor în A şi C la cercul circumscris triunghiului ABC, X intersecţia dreptelor ZA şi A_1C_1 şi Y intersecţia dreptelor ZC şi A_1C_1.

a) Arătaţi că T este centrul cercului înscris în triunghiul XYZ.

b) Se notează cu H ortocentrul triunghiului ABC şi cu D al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi A_1BC_1. Demonstraţi că punctele T, H şi D sunt coliniare.

c) Arătaţi că punctul D se află pe cercul circumscris triunghiului XYZ.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.