Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 13 mai 2014

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \quad \text{şi} \quad \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

sunt numere întregi.

Asian-Pacific M.O. 2002

Soluţie. Presupunând că $a \geq b$, rezultă $\dfrac{b^2+a}{a^2-b} \in \mathbb{N}^*$, deci $b^2+a \geq a^2-b$, de unde $(a+b)(a-b-1) \leq 0$. De aici $a=b$ sau $a=b+1$.

Dacă $a=b$, atunci $\dfrac{a^2+b}{b^2-a} = \dfrac{a+1}{a-1} \in \mathbb{Z}$ dacă $a-1 \mid a+1$, adică $a-1 \mid 2$, echivalent cu $a \in \{2,3\}$.

Dacă $a=b+1$, atunci $\dfrac{a^2+b}{b^2-a} = \dfrac{b^2+3b+1}{b^2-b-1} \in \mathbb{Z}$, dacă $b^2-b-1 \mid b^2+3b+1$, adică $b^2-b-1 \mid 4b+2$, deci $b^2-b-1 \leq 4b+2$. Rezultă de aici imediat că $b \leq 5$. Verificând aceste valori, se constată că numai $b=1$ şi $b=2$ satisfac condiţia dată.

Prin urmare, soluţiile problemei sunt $(2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)$.

Problema 2. Determinaţi numerele reale $x, y, z \in (0,1)$ care verifică simultan relaţiile:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\sqrt{1-z^2} \geq z \\ (y^2+z^2)\sqrt{1-x^2} \geq x \\ (z^2+x^2)\sqrt{1-y^2} \geq y \end{cases}.$$

Lucian Petrescu

Soluţie. Prima inegalitate se scrie echivalent $\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \geq \dfrac{1}{z\sqrt{1-z^2}}$. Cum

$$z\sqrt{1-z^2} = \sqrt{z^2(1-z^2)} \leq \frac{z^2+1-z^2}{2} = \frac{1}{2},$$

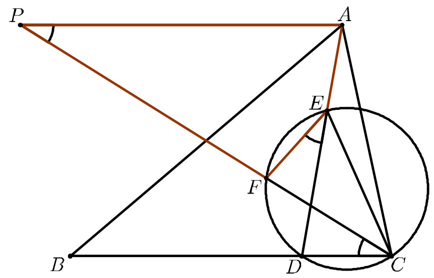
deducem că $\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \geq 2$, adică $x^2+y^2 \geq 2z^2$. Adunând cu relaţiile analoage, obţinem $2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(x^2+y^2+z^2)$. Prin urmare, în toate inegalităţile anterioare are loc egalitatea, de unde concluzionăm că $x=y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctele variabile $D \in (BC)$, $E \in (AD)$. Cercul circumscris triunghiului CDE intersectează mediana din C a triunghiului ABC în punctul F. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului AEF este situat pe o dreaptă fixă.

[* * *]

Soluţie. Patrulaterul $EFDC$ este inscriptibil, deci $\widehat{FED} \equiv \widehat{FCD}$. Fie P simetricul punctului C faţă de mijlocul laturii $[AB]$; atunci $AP \parallel BC$ şi $\widehat{FCD} \equiv \widehat{FPA}$.

Rezultă $\widehat{FPA} \equiv \widehat{FED}$, şi, cum $\widehat{FED}$ este unghi exterior patrulaterului $FEAP$, acesta este inscriptibil. Ca urmare, centrul cercului circumscris triunghiului AEF este situat pe mediatoarea segmentului $[AP]$ (care este o dreaptă fixă).



Problema 4. Fie $n \geq 6$. Avem la dispoziţie n culori. Colorăm fiecare din pătratele unitate ale unei table $n \times n$ cu câte una din cele n culori.

a) Arătaţi că, pentru orice asemenea colorare, există un drum al unui cal din pătratul din stânga-jos în pătratul din dreapta-sus care să nu folosească toate culorile.

b) Arătaţi că dacă reducem numărul de culori la $\left[\dfrac{2n}{3}\right]+2$, atunci afirmaţia este adevărată pentru o infinitate de numere naturale n şi falsă tot pentru o infinitate de numere.

Marius Bocanu

Soluţie. a) Dacă $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ drumul de lungime minimă are $2k$ paşi, adică trece prin $2k+1$ pătrate 1×1 (nu este important că drumul e minimal, ci doar că acest drum există: $(1,1) \to (2,3) \to (4,4)$ etc). Deoarece $2k+1 < 3k+1 = n$, acest drum nu va putea conţine pătrate 1×1 din fiecare din cele n culori.

Dacă $n = 3k+2$, $k \geq 2$, avem un drum de lungime $2k+3$: $(1,1) \to (2,3) \to (4,2) \to (3,4) \to (5,5)$, iar de aici se continuă drumul ca la cazul precedent. Din nou, deoarece $2k+3 < 3k+2$, $\forall\, k \geq 2$, concluzia se impune.

Pentru $n = 3k+3$, $k \geq 1$, avem un drum de lungime $2k+3$ pătrate: $(1,1) \to (2,3) \to (3,5) \to (5,4) \to (6,6)$ şi de aici ca la primul caz. Cum $2k+3 < 3k+3 = n$, concluzia se impune.

b) Fiecare pas creşte sau scade suma coordonatelor cu 1 sau 3. Pentru a ajunge dintr-un colţ în altul trebuie să se mărească suma coordonatelor cu $2n-2$, deci este nevoie de minim $\dfrac{2n-2}{3}$ paşi. Aceasta înseamnă un drum cu cel puţin $\dfrac{2n-2}{3}+1$ pătrate, sau, altfel spus, de $\left\lceil \dfrac{2n}{3} \right\rceil + 1$ pătrate.

Pentru $n = 3k+1$ asta înseamnă $2k+1$ (deci drumul găsit mai sus este chiar minimal). Iar pentru $n = 3k+3$, asta înseamnă $2k+3$, deci drumul găsit la a) este minimal şi nu conţine pătrate din fiecare culoare. Aşadar, pentru $n = 3k+1$, $3k+3$, afirmaţia rămâne adevărată.

Pentru $n = 3k+2$, drumul minimal are, conform estimării, cel puţin $\left\lceil \dfrac{2n}{3} \right\rceil + 1 = 2k+2$ pătrate. Dar un asemenea drum nu poate exista pentru că un drum cu $2k+2$ pătrate are capete de culori diferite (dacă colorăm ca la tabla de şah), deci drumul minimal are cel puţin $2k+3$ pătrate (drumul găsit la a) este deci minimal). Estimarea din enunţ ne dă tot $2k+3$. Vom arăta că în acest caz există o colorare cu $2k+3$ culori pentru care fiecare drum conţine toate culorile.

Vom colora colţul de start cu o primă culoare, succesorii săi cu a doua culoare, succesorii necoloraţi ai acestora cu a treia etc., până la culoarea $n+1$ (pătratele la care se poate ajunge din n paşi). În n paşi suma coordonatelor este cel mult $3n+2$, deci suntem sub diagonala care uneşte $(1, 3n+2)$ cu $(3n+2, 1)$. Folosim alte $n+1$ culori ca să colorăm simetric cealaltă jumătate de tablă. Câmpurile necolorate (măcar cele de pe diagonală) le colorăm cu a $2n+3$-a culoare. Este clar că orice drum conţine pătrate din fiecare culoare (nu se poate sări de la un număr mai mic la unul mai mare).