Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 13 mai 2014

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \quad \text{şi} \quad \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

sunt numere întregi.

Problema 2. Determinaţi numerele reale $x, y, z \in (0,1)$ care verifică simultan relaţiile:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\sqrt{1-z^2} \geq z \\ (y^2+z^2)\sqrt{1-x^2} \geq x \\ (z^2+x^2)\sqrt{1-y^2} \geq y \end{cases}.$$

Problema 3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctele variabile $D \in (BC)$, $E \in (AD)$. Cercul circumscris triunghiului CDE intersectează mediana din C a triunghiului ABC în punctul F. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului AEF este situat pe o dreaptă fixă.

Problema 4. Fie $n \geq 6$ un număr natural. Avem la dispoziţie n culori. Colorăm fiecare din pătratele unitate ale unei table $n \times n$ cu câte una din cele n culori.

a) Arătaţi că, pentru orice asemenea colorare, există un drum al unui cal din pătratul din stânga-jos în pătratul din dreapta-sus care să nu folosească toate culorile.

b) Arătaţi că dacă reducem numărul de culori la $\left[\frac{2n}{3}\right]+2$, atunci afirmaţia este adevărată pentru o infinitate de numere naturale n şi falsă tot pentru o infinitate de numere.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.