Test de Selecţie pentru EGMO 2014 (fete) şi MofM 2014

Problema 1. Fiind date $n+1$ numere reale distincte din intervalul $[0,1]$, demonstraţi că există două dintre ele $a \neq b$, astfel încât $ab|a-b| < \dfrac{1}{3n}$.

Problema 2. Care este numărul minim $m(n)$ de muchii ale lui K_n (graful complet cu $n \geq 4$ vârfuri) care pot fi colorate în roşu, în aşa fel încât orice subgraf K_4 să conţină un subgraf K_3 roşu? De examplu, $m(4) = 3$.

Problema 3. Fie $0 < p \leq Q$ numere reale fixate, şi fie a, b, x şi y numere reale pozitive, astfel încât $\begin{cases} ax & \leq p \\ ay & \leq Q \\ bx & \leq Q \\ by & \leq Q \end{cases}$. Determinaţi valoarea maximă a expresiei $(a+b)(x+y)$, şi găsiţi cazurile de egalitate.

Problema 4. Un triunghi (ne-degenerat) se zice a fi *special* dacă satisface condiţia ca înălţimea, mediana şi bisectoarea, toate dintr-un acelaşi vârf, partiţionează triunghiul în 4 triunghiuri ale căror arii formează (într-o ordine anume) o progresie aritmetică de 4 termeni. (Unul dintre aceste 4 triunghiuri este permis a fi degenerat.) Găsiţi toate triunghiurile speciale.

Problema 5. Fiind date numerele reale pozitive a, b, c cu $a^2+b^2+c^2 \geq 3$, demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ca} + \frac{c^2}{1+ab} \geq \frac{3}{2}$$

şi determinaţi când se obţine egalitatea.

Arătaţi că dacă $a^2+b^2+c^2 < 3$, inegalitatea nu mai este în general adevărată.

Problema 6. Găsiţi formula termenului general al unui şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ care satisface

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ 3(x_{n+1} - x_n) = \sqrt{x_{n+1}^2 + 16} + \sqrt{x_n^2 + 16} \end{cases}$$

Test preparat de DAN SCHWARZ
Timp de lucru **4** *ore*
Fiecare problemă valorează **7** *puncte*