The 2019 Danube Competition in Mathematics, October 26^{th}

Problema 1. Găsiţi toate numerele prime p pentru care $p^3 - 4p + 9$ este pătrat perfect.

Problema 2. Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţiile:
(i) $f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$
(ii) $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$
pentru orice numere reale x şi y.

Problema 3. Sunt colorate unele pătrate unitate dintr-o tablă 99×99 cu una dintre 5 culori distincte astfel încât fiecare culoare apare de acelaşi număr de ori. Pe o aceeaşi linie sau coloană nu există pătrate colorate diferit. Găsiţi numărul maxim posibil de pătrate colorate.

Problema 4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic APD şi punctele $B \in (AP)$, $C \in (PD)$. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se taie în Q. Punctele H_1 şi H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor APD, respectiv BPC. Fie X al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABQ şi CDQ ($X \neq Q$) şi Y al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ADQ şi BCQ ($Y \neq Q$).

Arătaţi că dacă dreapta H_1H_2 trece prin X, atunci H_1H_2 trece şi prin Y.

Problema 1. Găsiţi toate numerele prime p pentru care $p^3 - 4p + 9$ este pătrat perfect.

Soluţie. Se verifică direct că $p = 2$ este soluţie iar $p = 3$ nu este. Vom presupune $p > 3$.

Din $p^3 - 4p + 9 = n^2$, avem $(p-2)p(p+2) = (n-3)(n+3)$. Este clar că unul din cei trei factori din stânga este multiplu de 3 şi deci n este multiplu de 3. Presupunem $n = 3k$, $k \geq 1$ şi deci $(p-2)p(p+2) = 9(k-1)(k+1)$. Deoarece $p \neq 0$ produsele din cele două părţi ale egalităţii sunt nenule. Numărul prim $p > 3$ divide $9(k-1)(k+1)$ şi deci divide exact unul din factorii $k-1$ şi $k+1$.

Presupunem că $k - 1 = lp$. Rezultă $(p-2)(p+2) = 9l(lp+2)$. Reducând modulo p obţinem $18l + 4 \equiv 0 \pmod{p}$. Cum p este impar, p divide pe $9l + 2$. In particular, $p \leq 9l + 2$, $p - 2 \leq 9l$, şi deci $(p-2)(p+2) = 9l(lp+2)$ implică $p + 2 \geq lp + 2$. Acest lucru este posibil doar pentru $l = 1$ şi $p = 9l + 2 = 11$. Am obţinut şi soluţia $p = 11$.

Exact la fel se tratează cazul $k + 1 = lp$ şi se obţine $p = 7$.

Problema 2. Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţiile:
(i) $f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$
(ii) $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$
pentru orice numere reale x şi y.

Soluţie. Arătăm că singura funcţie care satisface cele două condiţii este $f(x) = x$.

Arătăm că f este injectivă. In (i) punem $y = 0$ şi obţinem $f(f(x^2) + f(0)) = x^2 + 2f(0)$, pentru orice x, sau echivalent,

$$f(f(a) + f(0)) = a + 2f(0) \tag{1}$$

pentru orice număr $a \geq 0$. Din (1) rezultă că f este injectivă pe mulţimea numerelor nenegative. Pentru orice y fixat, din condiţiile (i) şi (ii) obţinem că $f(.)$ este nemărginită superior. Dacă $f(y_1) = f(y_2)$ atunci $f(f(x^2)+y_1+f(y_1)) = f(f(x^2)+y_2+f(y_2))$. Pentru valori suficient de mari ale lui x expresiile $f(x^2) + y_1 + f(y_1)$ şi $f(x^2) + y_2 + f(y_2)$ sunt pozitive şi deci $y_1 = y_2$.

Arătăm că $f(0) = 0$.

Cazul 1. $f(0) \leq 0$ Pentru $a = -2f(0)$, avem $f(f(-2f(a)) + f(0)) = 0$. Deci există un număr real c pentru care $f(c) = 0$.

Facem $x = 0$ şi $y = c$ în (i): $f(f(0) + c) = 0$. Deoarece f este injectivă, obţinem $f(0) + c = c$, adică $f(0) = 0$.

Cazul 2. $f(0) \geq 0$. In (i) facem $x = y = 0$: $f(2f(0)) = 2f(0)$. Luăm acum $a = 3f(0) = f(0) + f(2f(0))$.

Din (1) avem $f(a) = f(f(2f(0)) + f(0)) = 2f(0) + 2f(0) = 4f(0)$. Adunăm $f(0)$ şi aplicăm f pentru a obţine $f(f(a) + f(0)) = f(5f(0)) = 3f(0) + 2f(0) = 5f(0)$.

In (i) punem acum $x = 0$ şi $y = 2f(0)$ şi obţinem $f(5f(0)) = 4f(0)$. Astfel $f(5f(0)) = 5f(0) = 4f(0)$, de unde rezultă că $f(0) = 0$.

Din (1), pentru $a \geq 0$ avem $f(f(a)) = a$, iar din (i), pentru $x = 0$, avem $f(y+f(y)) = 2f(y)$ pentru orice real y.

Facem acum $y = f(a)$: $f(f(a) + a) = 2f(f(a)) = 2a$. Facem $y = a$: $f(a + f(a)) = 2f(a)$. Obţinem că pentru orice $a \geq 0$ avem $f(a) = a$.

Atunci, (i) devine $f(x^2 + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$. Fixăm acum un y real oarecare. Există un $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2+y+f(y) > 0$. Atunci $f(x^2+y+f(y)) = x^2+y+f(y) = x^2 + 2f(y)$ şi deci $f(y) = y$.

Problema 3. Sunt colorate pătrate unitate dintr-o tablă 99×99 cu una dintre 5 culori distincte astfel încât fiecare culoare apare de acelaşi număr de ori. Pe o aceeaşi linie sau coloană nu există pătrate colorate diferit. Găsiţi numărul maxim posibil de pătrate colorate.

Soluţie. Vom numi rând orice linie sau coloană din tabel. Colorăm rândurile care conţin un pătrat colorat cu acea culoare. Un rând nu poate fi colorat cu două culori din ipoteză. Există $2 \cdot 99 = 198$ de rânduri, fiecare colorat cu una dintre cele 5 culori sau necolorat. Există o anumită culoare C asociată la cel mult $[198/5] = 39$ de rânduri. Toate pătratele ce au culoarea C se află la intersecţia acestor rânduri. Dacă avem x linii şi y coloane de culoare C, cu $x + y = l \leq 39$, atunci numărul pătratelor de culoare C este cel mult xy.

Dacă fixăm pe l, maximul produsului xy se realizează pentru $x = y = \frac{l}{2}$, dacă l este par şi pentru $x = \frac{l-1}{2}, y = \frac{l+1}{2}$ (sau $x = \frac{l+1}{2}, y = \frac{l-1}{2}$), dacă l este impar.

Pentru culoarea C luăm $l = 39$ şi obţinem că sunt cel mult $\frac{39-1}{2} \cdot \frac{39+1}{2} = 380$ de pătrate cu această culoare. Cum cele 5 culori apar de acelaşi număr de ori, rezultă că nu putem avea mai mult de $5 \cdot 380 = 1900$ pătrate colorate pe tablă.

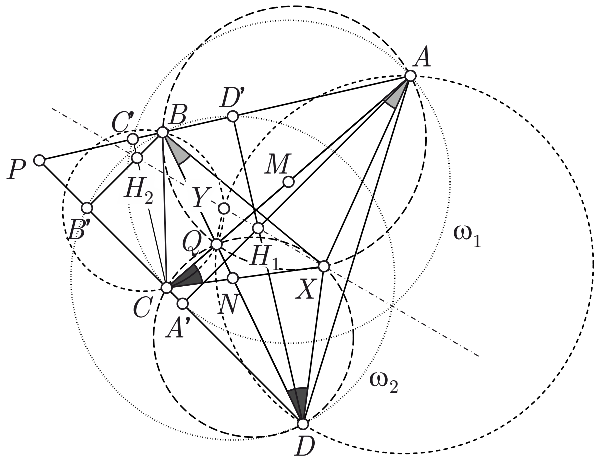
Dăm un exemplu în care avem exact 1900 de pătrate colorate. Considerăm pe diagonală 5 dreptunghiuri de dimensiuni 19×20 şi 20×19 plasate succesiv. Să remarcăm că două linii şi o coloană nu sunt folosite. Colorăm fiecare dintre cele 5 dreptunghiuri cu câte o culoare.

Problema 4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic APD şi punctele $B \in (AP)$, $C \in (PD)$. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se taie în Q. Punctele H_1 şi H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor APD, respectiv BPC. Fie X al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABQ şi CDQ ($X \neq Q$) şi Y al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ADQ şi BCQ ($Y \neq Q$).

Arătaţi că dacă dreapta H_1H_2 trece prin X, atunci H_1H_2 trece şi prin Y.

Soluţie. Fie AA', DD' înălţimi în ΔAPD şi BB', CC' înălţimi în ΔBPC.

Avem $\angle XAC = \angle XBD$ şi $\angle XCA = \angle XDB$, deci $\Delta XAC \sim \Delta XBD$. Arătăm că dacă H_1H_2 trece prin X, atunci triunghiurile precedente sunt chiar congruente, şi reciproc.



Considerăm cercurile ω_1, ω_2 de diametre AC, respectiv BD. Punctele H_1, H_2 se află pe axa radicală a acestor cercuri, deoarece $A, A' \in \omega_1$, $D, D' \in \omega_2$ şi $\mathcal{P}_{\omega_1}(H_1) = -AH_1 \cdot A'H_1 = -DH_1 \cdot D'H_1 = \mathcal{P}_{\omega_2}(H_1)$; analog pentru H_2. Astfel, $X \in H_1H_2$ dacă şi numai dacă $\mathcal{P}_{\omega_1}(X) = \mathcal{P}_{\omega_2}(X)$.

Avem $\mathcal{P}_{\omega_1}(X) = XM^2 - MC^2$ şi $\mathcal{P}_{\omega_2}(X) = XN^2 - ND^2$, unde M, N sunt centrele cercurilor ω_1, respectiv ω_2. Observăm că $(XM^2 - MC^2)/(XN^2 - ND^2)$ este pătratul raportului de asemănare a triunghiurilor AXC şi BXD, sau $XM^2 - MC^2 = XN^2 - ND^2 = 0$. În al doilea caz însă, triunghiurile AXC şi BXD ar fi asemenea şi dreptunghice în X, caz în care dreapta CD s-ar obţine din dreapta AB printr-o asemănare de centru X şi unghi de $90°$, deci $AB \perp CD$ – fals. Rămâne, deci, că $(XM^2 - MC^2)/(XN^2 - ND^2)$ este pătratul raportului de asemănare a triunghiurilor AXC şi BXD.

Rezultă că $X \in H_1H_2$ dacă şi numai dacă raportul de asemănare a triunghiurilor AXC şi BXD este 1, adică $\Delta AXC \equiv \Delta BXD$. Aceasta este însă echivalent cu $AC = BD$.

În mod analog, $Y \in H_1H_2$ dacă şi numai dacă $AC = BD$, de unde concluzia problemei.