CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIV - a, Călărași, 26 octombrie 2019

Clasa a VIII–a

Problema 1. Să se determine numerele reale *a*, *b*, *c* care verifică simultan relațiile : $a^2-b-2c+2\le 0$; $9(b^2-a)-16c+1\le 0$; $8(2c^2-b)+5(a+1)\le 0$.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 2. Un număr natural are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă poate fi scris ca o sumă de două pătrate perfecte. Fie *n* un număr natural astfel încât numărul $9n$ are proprietatea $\mathcal{P}$. Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{N}$, numărul $\left(a^2+1\right)n$ are proprietatea $\mathcal{P}$.

Relu Ciupea, Oltenița

Problema 3. Pentru $x_1\in\mathbb{N}$ se consideră numerele $x_2=2x_1$, $x_3=3\left(x_1+x_2\right)$, $x_4=4\left(x_1+x_2+x_3\right)$, … $x_{2019}=2019\left(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2018}\right)$. Să se demonstreze că numărul x_{2019} este divizibil cu 2019^2.

Stelică Pană, Chirnogi

Problema 4. Fie *ABC* un triunghi, *G* centrul său de greutate și B', C' mijloacele laturilor *AC*, respectiv *AB*. Să se că arate că patrulaterul $AC'GB'$ este inscriptibil dacă și numai dacă are loc relația $AB^2+AC^2=2BC^2$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Problema 5. Fie *ABCD* un patrulater convex, punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD* respectiv *DA*, iar punctul *G* este intersecția dreptelor *MP* și *NQ*. Dacă S_A, S_B, S_C, S_D sunt ariile patrulaterelor *AMGQ*, *BNGM*, *CPGN* și *DQGP*, să se arate că patrulaterul *ABCD* are două laturi paralele dacă și numai dacă $S_A\cdot S_C=S_B\cdot S_D$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: **Problema 1.** 4 puncte; **Problema 2**. 5 puncte; **Problema 3.** 5 puncte; **Problema 4.** 7 puncte; **Problema 5. 7** puncte.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIV - a, Călărași, 26 octombrie 2019

Clasa a VIII–a

Problema 1. Să se determine numerele reale *a*, *b*, *c*, *d* care verifică simultan relațiile : $a^2-b-2c+2\le 0$; $9(b^2-a)-16c+1\le 0$; $8(2c^2-b)+5(a+1)\le 0$.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: Din ipoteză rezultă $4\left(a^2-b-2c+2\right)+9(b^2-a)-16c+1+8(2c^2-b)+5(a+1)\le 0 \Leftrightarrow$

$(2a-1)^2+(3b-2)^2+(4c-3)^2\le 0 \Rightarrow a=\frac{1}{2};\ b=\frac{2}{3};\ c=\frac{3}{4}.$

Problema 2. Spunem că un număr natural are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă poate fi scris ca o sumă de două pătrate perfecte. Fie n un număr natural astfel încât numărul $9n$ are proprietatea $\mathcal{P}$. Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{N}$, numărul $\left(a^2+1\right)n$ are proprietatea $\mathcal{P}$.

Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: Deoarece $9n$ are proprietatea $\mathcal{P}$, există numerele naturale x și y, astfel încât $9n=x^2+y^2$

Rezultă $3\,|\,x$ și $3\,|\,y$ iar dacă scriem $x=3u$ respectiv $y=3v$, se obține egalitatea:

$9n=9u^2+9v^2 \Leftrightarrow n=u^2+v^2$ (n are proprietatea $\mathcal{P}$).

$\left(a^2+1\right)n=\left(a^2+1\right)\left(u^2+v^2\right)=a^2u^2+a^2v^2+u^2+v^2=a^2v^2+2avu+u^2+a^2u^2-2avu+u^2=$

$=\left(av+u\right)^2+\left(av-u\right)^2 \Rightarrow \left(a^2+1\right)n$ are proprietatea $\mathcal{P}$.

Problema 3. Pentru $x_1\in\mathbb{N}$ se consideră numerele $x_2=2x_1,\ x_3=3\left(x_1+x_2\right),\ x_4=4\left(x_1+x_2+x_3\right),\ \ldots$. Să se demonstreze că numărul x_{2019} este divizibil cu 2019^2.

Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: $x_n=n\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}\right)$ și $x_{n-1}=\left(n-1\right)\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 3\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n=n\left[\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}\right)+\left(n-1\right)\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}\right)\right]=n^2\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}\right)\Rightarrow n^2\,|\,x_n.$

Problema 4. Fie *ABC* un triunghi, *G* centrul său de greutate și B', C' mijloacele laturilor *AC*, respectiv *AB*. Să se arate că patrulaterul $AC'GB'$ este inscriptibil dacă și numai dacă are loc relația $AB^2+AC^2=2BC^2$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: "$\Rightarrow$" Dacă $AC'GB'$ este inscriptibil în cercul $\mathcal{C}$, din puterea punctului *B* față de cercul $\mathcal{C}$ avem:

$BC'\bullet BA=BG\bullet BB'\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB\bullet AB=\frac{2}{3}m_B\bullet m_B \Leftrightarrow 3AB^2=4m_B^2\Leftrightarrow 3c^2=2\left(a^2+c^2\right)-b^2$

$\Leftrightarrow AB^2+AC^2=2BC^2.$

"$\Leftarrow$" În patrulaterul $AC'GB'$ avem:

$AC'=\frac{c}{2};\ AB'=\frac{b}{2}; C'G=\frac{1}{3}m_C;\ B'G=\frac{1}{3}m_B;\ AG=\frac{2}{3}m_A;\ C'B'=\frac{a}{2}.$

Din teorema lui Ptolemeu: $AC'GB'$ este inscriptibil dacă şi numai dacă:

$AC'\bullet GB'+AB'\bullet GC'=AG\bullet C'B'\Leftrightarrow c\bullet m_B+b\bullet m_C=2a\bullet m_A$ (1)

Din relația $b^2+c^2=2a^2$ rezultă

$m_B=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ și $m_C=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ ceea ce implică că relația (1) este adevărată.

Problema 5. Fie *ABCD* un patrulater convex, punctele *M*, *N*, *P*, *Q* sunt mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD* respectiv *DA*, iar punctul *G* este intersecția dreptelor *MP* și *NQ*. Dacă S_A, S_B, S_C, S_D sunt ariile patrulaterelor *AMGQ*, *BNGM*, *CPGN* și *DQGP*, să se arate că patrulaterul *ABCD* are două laturi paralele dacă și numai dacă $S_A \cdot S_C = S_B \cdot S_D$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: Vom arăta mai întâi că are loc relația $S_A + S_C = S_B + S_D$. Deoarece *MNPQ* este paralelogram avem egalitatea de arii $S(MGN) = S(NGP) = S(PGQ) = S(QGM) = \frac{1}{4}S(MNPQ)$. Deci $S_A + S_C = S_B + S_D$

$$\Leftrightarrow S(AMQ) + S(CPN) = S(BMN) + S(DQP) \Leftrightarrow \frac{1}{4}S(ABD) + \frac{1}{4}S(CDB) = \frac{1}{4}S(BCA) + \frac{1}{4}S(DAC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}S(ABCD) = \frac{1}{4}S(ABCD)$$

Din relațiile $S_A + S_C = S_B + S_D$ și $S_A \bullet S_C = S_B \bullet S_D$ rezultă $(S_A - S_C)^2 = (S_B - S_D)^2$ deci $S_A - S_C = \pm(S_B - S_D)$.

În cazul $S_A - S_C = S_B - S_D$ rezultă $S_A = S_B$ și $S_C = S_D$. Deducem $S(AMQ) = S(MBN)$ și cum $AM = BM$ rezultă că înălţimile din *Q* şi *N* sunt egale, deci $QN \| AB$ şi analog $QN \| CD$, deci $AB \| CD$.

În cazul $S_A - S_C = -(S_B - S_D)$ rezultă în mod similar $AD \| BC$.