CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIV - a, Călăraşi, 26 octombrie 2019

Clasa a VII–a

Problema 1. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AD < AB$. Semidreptele AE și CF sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAD$, respectiv $\sphericalangle DCB$, $E \in CD$, $F \in AB$. Notăm cu G intersecția dreptelor AE și BC, H este intersecția dreptelor CF și AD, iar O intersecția diagonalelor AC și BD.

a) Arătați că $AECF$ este paralelogram.
b) Dacă $\sphericalangle DAB = 40°$, determinați măsurile unghiurilor patrulaterului $AGCH$.
c) Demonstrați că G, O și H sunt coliniare

Gabriela Ruse, Călărași

Problema 2. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) < 45°$. Pe perpendiculara în A pe AB se consideră punctul D, iar pe perpendiculara în C pe AC se consideră punctul E, astfel încât $AD = CE$. Punctele D și E aparțin semiplanului determinat de dreapta BC și punctul A, iar dreapta AC separă punctele D și E. Dacă $AD + AE = BM$, unde $\{M\} = BD \cap AE$, atunci arătați că $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle BAC$.

Sorin Furtună, Călărași

Problema 3. Într-un pătrat de dimensiuni 10×10 fiecare pătrat 1×1 este alb sau negru. Numim ”transformare” schimbarea culorilor tuturor pătratelor 1×1 de pe aceeași linie sau de pe aceeași coloană. Pe o linie sau pe o coloană se poate face cel mult o ”transformare”. Dacă inițial toate cele 10×10 pătrate sunt de culoare albă, să se decidă dacă după o succesiune de ”transformări” putem obține exact 75 pătrate negre.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Problema 4. Se consideră x și y numere naturale nenule. Să se demonstreze că $11 \mid (3^x - 2^y)$ dacă și numai dacă $10 \mid (2x + y)$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: **Problema 1. a)** 2 puncte, **b)** 2 puncte, **c)** 3 puncte; **Problema 2**. 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

f

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAȘI

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIV - a, Călărași, 26 octombrie 2019

Clasa a VII–a

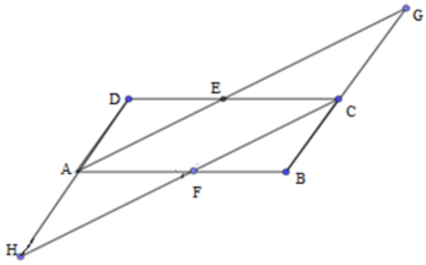
Problema 1. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AD < AB$. Semidreptele AE și CF sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAD$, respectiv $\sphericalangle DCB$, $E \in CD$, $F \in AB$. Notăm cu G intersecția dreptelor AE și BC, H este intersecția dreptelor CF și AD, iar O intersecția diagonalelor AC și BD.

a) Arătați că $AECF$ este paralelogram.

b) Dacă $\sphericalangle DAB = 40°$, determinați măsurile unghiurilor patrulaterului $AGCH$.

c) Demonstrați că G, O și H sunt coliniare

Gabriela Ruse, Călărași



Soluție: a) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD$. Notăm $\sphericalangle DAB = 2a°$

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle EAB = a°$, $\sphericalangle DCF = \sphericalangle BCF = a°$ $\Rightarrow \sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle ECF$ (1)

$AB \| CD$, AE secantă $\Rightarrow \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle DEA \Rightarrow \sphericalangle AEC = 180° - a°$.

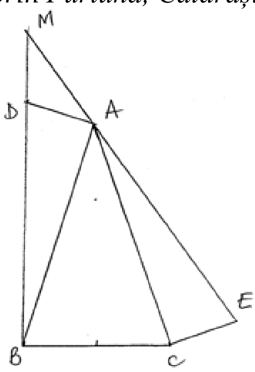
$AB \| CD$, CF secantă $\Rightarrow \sphericalangle ECF \equiv \sphericalangle CFB \Rightarrow \sphericalangle CFA = 180° - a°$.

Deci $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle CFA$ (2) . Din (1) și (2) $\Rightarrow AECF$ este paralelogram.

b) Din a)$\Rightarrow AE \| CF \Rightarrow AG \| CH$; $AH \| CG \Rightarrow AGCH$ paralelogram. Măsura $\sphericalangle DAB = 40°$, AE bisectoarea $\sphericalangle DAB \Rightarrow \sphericalangle EAB = 20°$, $\sphericalangle BAH = 140° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle EAH = 20° + 140° = 160°$. Atunci $\sphericalangle GCH = 160°$, $\sphericalangle G = 20°$, $\sphericalangle H = 20°$. (Sau $\sphericalangle DAG \equiv \sphericalangle CGA$ alterne interne etc.) **c)** Cum $ABCD$ este paralelogram, iar $AC \cap BD = \{O\}$, O este mijlocul segmentelor AC și BD. Cum $AGCH$ paralelogram (din **b)**), punctul de intersecție al diagonalelor AC și GH este mijlocul acestor diagonale. Dacă O este mijlocul lui AC, prin O trece și diagonala GH, deci G, O, H sunt coliniare.

Problema 2. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) < 45°$. Pe perpendiculara în A pe AB se consideră punctul D, iar pe perpendiculara în C pe AC se consideră punctul E, astfel încât $AD = CE$. Punctele D și E aparțin semiplanului determinat de dreapta BC și punctul A, iar dreapta AC separă punctele D și E. Dacă $AD + AE = BM$, unde $\{M\} = BD \cap AE$, atunci arătați că $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle BAC$.

Sorin Furtună, Călărași



Soluție: $\Delta ABD \equiv \Delta CAE$ $(C.C.) \Rightarrow BD = AE$

Din $AD + AE = BM \Rightarrow AD + BD = BD + DM \Rightarrow AD = DM \Rightarrow \Delta ADM$ -isoscel$\Rightarrow$

$m(\sphericalangle DAM) = m(\sphericalangle DMA) = x° \Rightarrow m(\sphericalangle ADB) = 2x°$ și $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle CAE) = 90° - 2x°$

Deoarece $m(\sphericalangle CAE) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle DAM) = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 90° - 2x° + m(\sphericalangle BAC) + 90° + x° = 180°$ de unde deducem că $m(\sphericalangle BAC) = x°$, deci

$m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle DAM)$.

Problema 3. Într-un pătrat de dimensiuni 10×10 fiecare pătrat 1×1 este alb sau negru. Numim ”transformare” schimbarea culorilor tuturor pătratelor 1×1 de pe aceeași linie sau de pe aceeași coloană. Pe o linie sau pe o coloană se poate face cel mult o ”transformare”. Dacă inițial toate cele 10×10 pătrate sunt de culoare albă, să se decidă dacă după o succesiune de ”transformări” putem obține exact 75 pătrate negre.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: Daca se fac a transformări pe linii și b transformări pe coloane, atunci numărul pătratelor negre este $10a + 10b - 2ab$; $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Cerința problemei este echivalentă cu $10a + 10b - 2ab = 75 \Rightarrow 2 | 75$, fals.

Problema 4. Se consideră x și y numere naturale nenule. Să se demonstreze că $11 | (3^x - 2^y)$ dacă și numai dacă $10 | (2x + y)$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: Deoarece $3^x - 2^y$ este impar, rezultă $11 \mid (3^x - 2^y) \Leftrightarrow 11 \mid 2^{2x}(3^x - 2^y) \Leftrightarrow 11 \mid (12^x - 2^{2x+y}) \Leftrightarrow 11 \mid (2^{2x+y} - 1)$; $11 \mid (2^1 - 2)$, $11 \mid (2^2 - 4)$, $11 \mid (2^3 - 8)$, $11 \mid (2^4 - 5)$, $11 \mid (2^5 - 10)$, $11 \mid (2^6 - 9)$, $11 \mid (2^7 - 7)$, $11 \mid (2^8 - 3)$, $11 \mid (2^9 - 6)$, $11 \mid (2^{10} - 1)$, $11 \mid (2^{11} - 2)$ ș.a.m.d. Rezultă că $11 \mid (2^p - r)$; $p \in \mathbb{N}^*$ și $r \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ dacă și numai dacă $11 \mid (2^{10k+p} - r)$, oricare ar fi numărul natural *k*. În consecință, $11 \mid (3^x - 2^y)$ dacă și numai dacă $10 \mid (2x + y)$.