CONCURSUL INTERNAŢIONAL „MATHEMATICAL DANUBE COMPETITION”

Ediția a XIV - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Juniori

Problema 1

Să se determine toate perechile de numere naturale (n,m) care verifică simultan condiţiile:
i) Numărul *n* este compus;
ii) Dacă numerele $d_1, d_2, ..., d_k, k \in \mathbb{N}^*$ sunt toţi divizorii proprii ai lui *n*, atunci numerele $d_1+1, d_2+1, ..., d_k+1$ sunt toţi divizorii proprii ai lui *m*.

Problema 2

Se consideră un triunghi *ABC* în interiorul căruia există un punct *D* astfel încât $m(DAC) = m(DCA) = 30^\circ$ şi $m(DBA) = 60^\circ$. Dacă punctul *E* este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $F \in (AC)$ astfel încât $AF = 2FC$, demonstraţi că $DE \perp EF$.

Problema 3

Pentru numărul natural nenul *n* există un număr natural k, $k \geq 2$, şi numerele raţionale pozitive $a_1, a_2, ..., a_k$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_k = n$. Determinaţi toate valorile posibile ale numărului *n*.

Problema 4

Fie *M* mulţimea numerelor naturale impare. Pentru orice număr natural nenul *n*, notăm cu $A(n)$ numărul submulţimilor lui *M* care au suma elementelor egală cu *n*. (De exemplu, $A(9) = 2$ deoarece singurele submulţimi ale lui *M* care au suma elementelor egală cu 9 sunt $\{9\}$ şi $\{1,3,5\}$) .

a) Arătaţi că $A(n) \leq A(n+1)$ pentru oricare număr natural *n*, $n \geq 2$;

b) Determinaţi numerele naturale *n*, $n \geq 2$, pentru care $A(n) = A(n+1)$.

Soluţii juniori

Problema 1

Să se determine toate perechile de numere naturale (n,m) care verifică simultan condiţiile:
i) Numărul *n* este compus;
ii) Dacă numerele $d_1, d_2, ..., d_k, k \in \mathbb{N}^*$ sunt toţi divizorii proprii ai lui *n*, atunci numerele $d_1+1, d_2+1, ..., d_k+1$ sunt toţi divizorii proprii ai lui *m*.

Soluţie (*prof. Cristian Mangra,Bucureşti*):

Răspuns: $(n,m) \in \{(4,9),(8,15)\}$

Pentru $k=1$, obţinem $n=p^2$, unde *p* este număr prim. Deducem că $m=(p+1)^2$, unde $p+1$ este număr prim. Obţinem $p=2, q=3$ şi perechea $(n,m)=(4,9)$.
Pentru $k \geq 2$, considerăm $d_1 < d_2 < ... < d_k$ toţi divizorii proprii ai lui *n*.
Atunci $n = d_1 d_k = d_2 d_{k-1}$ şi $m = (d_1+1)(d_k+1) = (d_2+1)(d_{k-1}+1)$, de unde deducem că $d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1}$, adică $d_1 + \frac{n}{d_1} = d_2 + \frac{n}{d_2}$, echivalent cu $(d_1 - d_2)\left(1 - \frac{n}{d_1 d_2}\right) = 0$.
Prin urmare $n = d_1 d_2$, deci $k=2$, adică

a) $n = d_1 d_2$, unde d_1 şi d_2 sunt numere prime diferite, deci $m = (d_1+1)(d_2+1)$. Cum d_1+1 şi d_2+1 sunt trebuie să fie prime diferite, iar d_2+1 este par, nu avem soluţie.

b) $n = d_1^3$, unde d_1 este număr prim, adică $m = (d_1+1)(d_1^2+1)$ şi d_1+1, d_1^2+1 sunt numere prime. Obţinem $d_1 = 2$ şi perechea $(n,m)=(8,15)$.

Problema 2

Se consideră un triunghi *ABC* în interiorul căruia există un punct *D* astfel încât $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{DBA}) = 60^\circ$. Dacă punctul *E* este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $F \in (AC)$ astfel încât $AF = 2FC$, demonstraţi că $DE \perp EF$.

Soluţie:

Fie *G* mijlocul segmentului $[AF]$ şi *M* mijlocul segmentului $[AC]$. Evident, *M* este mijlocul segmentului $[GF]$ şi $DM \perp AC$. Deoarece $d(F,DM) = MF = \frac{GF}{2} = \frac{CF}{2} = d(F,DC)$, rezultă că $(DF$ este bisectoarea unghiului *MDC*. Deducem că triunghiul *DFG* este echilateral.
Deoarece $m(\widehat{DGF}) = m(\widehat{DBA}) = 60^\circ$, rezultă că patrulaterul *ABDG* este inscriptibil. Prin urmare, $m(\widehat{DBG}) = m(\widehat{DAG}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{ABG}) = m(\widehat{GDA}) = 30^\circ$.

Segmentul *EF* este linie mijlocie în triunghiul *CBG*, iar segmentul *EM* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*. Obţinem $EF \parallel BG$, respectiv $EM \parallel AB$, deci $m\left(\widehat{MEF}\right) = m\left(\widehat{ABG}\right) = 30^\circ$.

Cum $m\left(\widehat{MDF}\right) = 30^\circ$, rezultă că patrulaterul *DMFE* este inscriptibil şi

$m\left(\widehat{DEF}\right) = m\left(\widehat{DMF}\right) = 90^\circ$.

Problema 3

Pentru numărul natural nenul *n* există un număr natural k, $k \geq 2$, şi numerele raţionale pozitive $a_1, a_2, ..., a_k$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_k = n$. Determinaţi toate valorile posibile ale numărului *n*.

Soluţie (*prof. Cristian Mangra, Bucureşti*):

Răspuns: $n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3, 5\}$

- Dacă *n* este număr compus, $n = pq, p > 1, q > 1$, luăm $a_1 = p, a_2 = q$ şi $a_3 = a_4 ... = a_k = 1$, unde $k = n - (p + q)$. Astfel, se verifică $a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_k = n$.

- Dacă *n* este număr prim $n \geq 11$, luăm $a_1 = \frac{n}{2}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 4$ şi $a_4 = a_5 = ... = a_k = 1$, unde $k = \frac{n-3}{2}$. Astfel, se verifică $a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_k = n$.

- Dacă $n = 7$, luăm $k = 3$ şi $a_1 = \frac{9}{2}, a_2 = \frac{7}{6}, a_3 = \frac{4}{3}$.

Presupunem că există un număr natural *n*, mai mic sau egal cu 5, care nu este compus şi verifică enunţul.

Din inegalitatea mediilor obţinem $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}$, echivalentă cu $n^{k-1} \geq k^k$.

- Cazurile $n \in \{1, 2\}$ nu convin.
- Dacă $n = 3$, avem $3^{k-1} < k^k$, oricare $k \geq 2$. Nu se verifică $n^{k-1} \geq k^k$.
- Dacă $n = 5$, avem $5^{k-1} < k^k$, oricare $k \geq 3$. Nu se verifică $n^{k-1} \geq k^k$.

Pentru $k = 2$, obţinem $a_1 + a_2 = a_1 a = 5$, care nu se verifică pentru numere raţionale.

Problema 4

Fie *M* mulţimea numerelor naturale impare. Pentru orice număr natural nenul *n*, notăm cu $A(n)$ numărul submulţimilor lui *M* care au suma elementelor egală cu *n*. (De exemplu, $A(9) = 2$ deoarece singurele submulţimi ale lui *M* care au suma elementelor egală cu 9 sunt $\{9\}$ şi $\{1, 3, 5\}$) .

a) Arătaţi că $A(n) \leq A(n+1)$ pentru oricare număr natural *n*, $n \geq 2$;

b) Determinaţi numerele naturale *n*, $n \geq 2$ pentru care $A(n) = A(n+1)$.

Soluţie (*lector dr. Andrei Eckstein, Timişoara*):

a) Vom indica un procedeu prin care, fiecărei submulţimi a lui *M* care are suma

elementelor egală cu *n* îi punem în corespondenţă câte o submulţime a lui *M* care are suma elementelor $n+1$, astfel încât, la două submulţimi diferite cu suma elementelor egală cu *n*, să le corespundă două submulţimi diferite cu suma elementelor egală cu $n+1$.
- Dintr-o submulţime care nu îl conţine pe 1 şi are suma elementelor egală cu *n*, adăugându-l pe 1, obţinem o submulţime cu suma elementelor $n+1$ care îl conţine pe 1.
- Dintr-o submulţime care îl conţine pe 1 şi are suma elementelor *n* obţinem o submulţime cu suma elementelor $n+1$astfel: îl eliminăm pe 1 şi pe cel mai mare element al mulţimii, fie acesta $2k-1$, cu $k\in\mathbb{N},(k\geq 2)$ şi introducem în submulţime elementul $2k+1$.

Procedeul descris mai sus asociază la două submulţimi diferite cu suma elementelor egală cu *n* două submulţimi diferite cu suma elementelor egală cu $n+1$. Rezultă că $A(n)\leq A(n+1)$, oricare ar fi $n\geq 2$.

b) Dacă $n\geq 3$, obţinem, prin procedeul de mai sus, orice submulţime cu suma elementelor $n+1$ care îl conţine pe 1 şi orice submulţime care nu îl conţine pe 1 şi care are proprietatea că, dacă cel mai mare element al ei este $2k+1$, atunci $2k-1$nu face parte din submulţime.

- Dacă $n=4k$, mulţ$\{5,2k-3,2k-1\}$ nu provine din cele numărate la $A(n)$, deci $A(n)<A(n+1)$ pentru orice $n=4k$ cu $2k-3\geq 7$, adică $n\geq 20$.

Dacă $n=4k-1$, submulţimea$\{2k-1,2k+1\}$ nu se obţine din submulţimile numărate la $A(n)$ pentru $k\geq 2$, adică $n\geq 7$.

Dacă $n=4k+1$, submulţimea$\{3,7,2k-5,2k-3\}$, $k\geq 7$, nu se obţine prin procedeul indicat din niciuna din submulţimile numărate la $A(n)$, adică pentru $n\geq 29$ nu putem avea egalitatea dorită.

Dacă $n=4k+2$, submulţimea $\{3,2k-1,2k+1\}$ nu se obţine din submulţimile care au suma elementelor egală cu *n* pentru $k\geq 3$, adică pentru $n\geq 14$.

Deci, putem avea $A(n)=A(n+1)$ cel mult pentru 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 21, 25.

Avem, prin calcul:

$A(2)=0$,

$A(3)=1=A(4)=A(5)=A(6)=A(7)$,

$A(8)=A(9)=2=A(10)=A(11)$,

$A(12)=A(13)=A(14)=3$,

$A(16)=A(17)=A(18)=5$,

$A(21)=A(22)=8$,

şi $A(25)=A(26)=12$.

Prin urmare, avem egalitate pentru toate numerele din lista de mai sus cu excepţia lui 2.