CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIII - a, Călărași, 27 octombrie 2018

Clasa a VIII–a

Problema 1. Fie *a*, *b*, *c* trei numere reale cu proprietățile $abc=1$ și $a+ab+1\neq 0$. Demonstrați că:

a) $b+bc+1\neq 0$;

b) $\frac{a+2018}{a+ab+1}+\frac{b+2018}{b+bc+1}+\frac{c+2018}{c+ca+1}=2019.$

prof. Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 2.

a) Găsiți două numere iraționale *x* și *y* cu proprietățile $x+y,\ 4xy\in\mathbb{N}$ și $x+y=4xy$.

b) Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere iraționale $(x,\ y)$ cu proprietățile $x+y,\ 4xy\in\mathbb{N}$ și $x+y=4xy$.

prof. Gabriela Ruse

Problema 3. Să se determine numerele naturale $a,\ b$ pentru care numărul $a^4+a^2b^2+b^4$ este putere a unui număr prim.

prof. Vasile Pop, Cluj Napoca

Problema 4. În triunghiul ascuțitunghic *ABC*, fie $a,\ b,\ c$ lungimile laturilor și $h_a,\ h_b,\ h_c$ lungimile înălțimilor corespunzătoare. Dacă $h_a=\frac{2}{3}a$ și $h_b=\frac{3}{4}b$, atunci determinați numărul rațional *p* cu proprietatea $h_c=pc$.

prof. Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Problema 5. Să se determine toate triunghiurile *ABC* din plan pentru care există puncte *M* în plan astfel ca triunghiurile *MAB, MBC, MCA* să aibă toate aceeași arie și toate același perimetru.

prof. Vasile Pop, Cluj Napoca

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. a) 1p, b) 2p; Problema 2 a) 1p, b) 3p; Problema 3. a) 7p; Problema 4. 7p; Problema 5. 7p.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXIII - a, Călărași, 27 octombrie 2018

Clasa a VIII–a

Problema 1. Fie *a*, *b*, *c* trei numere reale cu proprietățile $abc=1$ și $a+ab+1\neq 0$. Demonstrați că:

a) $b+bc+1\neq 0$;

b) $\dfrac{a+2018}{a+ab+1}+\dfrac{b+2018}{b+bc+1}+\dfrac{c+2018}{c+ca+1}=2019.$

prof. Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: **a)** evident $bc\neq 0$; $a+ab+1\neq 0 \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R},\ x\neq 0,$ astfel încât $a+a\cdot b+1=x \Leftrightarrow abc+(abc)b+bc=bcx \Rightarrow b+bc+1\neq 0.$(1p)

b) $\dfrac{a+2018}{a+ab+1}+\dfrac{b+2018}{b+bc+1}+\dfrac{c+2018}{c+ca+1}=\dfrac{a+2018}{a+ab+1}+\dfrac{ab+2018a}{ab+abc+a}+\dfrac{abc+2018ab}{abc+(abc)a+ab}=2019.$(2p)

Problema 2.

a) Găsiți două numere iraționale *x* și *y* cu proprietățile $x+y,\ 4xy\in\mathbb{N}$ și $x+y=4xy.$

b) Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere iraționale $(x,\ y)$ cu proprietățile $x+y,\ 4xy\in\mathbb{N}$ și $x+y=4xy.$

prof. Gabriela Ruse

Soluție: a) $x=2+\sqrt{3},\ y=2-\sqrt{3}$ (1p);

b) $x+y=n\Rightarrow y=n-x,\ n\in\mathbb{N}$; $4xy=n\Rightarrow 4x(n-x)=n\Rightarrow 4xn-4x^2=n$ (1p)

$\Rightarrow 4x^2-4nx+n^2=n^2-n\Rightarrow(2x-n)^2=n^2-n\Rightarrow x=\dfrac{n\pm\sqrt{n^2-n}}{2}$; $n^2-n=n\cdot(n-1)$ este pătrat perfect dacă și numai dacă $n=0$ sau $n=1,$ rezultă că $x=\dfrac{n+\sqrt{n^2-n}}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ y=\dfrac{n-\sqrt{n^2-n}}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x+y=4xy.$(2p)

Problema 3. Să se determine numerele naturale $a,\ b$ pentru care numărul $a^4+a^2b^2+b^4$ este putere a unui număr prim.

prof. Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: Observăm că $a=0,\ b=p^k,\ p$ număr prim, $k\in\mathbb{N}$ și $b=0,\ a=p^k,\ p$ număr prim, $k\in\mathbb{N}$ sunt soluții.(1p) Fie $a,\ b\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $a^4+a^2b^2+b^4=p^k,\ p$ număr prim, $k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=p^k\Leftrightarrow\exists k_1,\ k_2\in\mathbb{N},\ k_1<k_2,$ astfel încât $a^2-ab+b^2=p^{k_1}$ și $a^2+ab+b^2=p^{k_2}$. (2p)

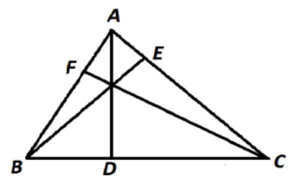
Din inegalitatea $3(a^2-ab+b^2)\geq a^2+ab+b^2,\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}\Rightarrow 3p^{k_1}\geq p^{k_2}\Rightarrow p=2$ sau $p=3$ și $k_2=k_1+1.$ (2p) Dacă $p=2\Rightarrow 2(a^2-ab+b^2)=a^2+ab+b^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-3\dfrac{a}{b}+1=0\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}\in\left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}\Rightarrow\dfrac{a}{b}\notin\mathbb{Q}.$

Dacă $p=3\Rightarrow 3(a^2-ab+b^2)=a^2+ab+b^2\Leftrightarrow(a-b)^2=0\Rightarrow a=b=3^n,\ n\in\mathbb{N}$, soluție.(2p)

Problema 4. În triunghiul ascuțitunghic ABC, fie a, b, c lungimile laturilor și h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor corespunzătoare. Dacă $h_a = \frac{2}{3}a$ și $h_b = \frac{3}{4}b$, atunci determinați numărul rațional p cu proprietatea $h_c = pc$.

prof. Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: $a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow \frac{2}{3}a^2 = \frac{3}{4}b^2 \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$. (2p)



Dacă $AD \perp BC,\ D \in (BC) \Rightarrow DC^2 = AC^2 - AD^2 \Rightarrow DC = \frac{2a}{3} \Rightarrow$ (1p)

$DC = AD \Rightarrow \Delta ADC$ este dreptunghic și isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = 45^0$ (1p).

Dacă

$BE \perp AC,\ E \in (AC) \Rightarrow \Delta BEC$ este dreptunghic și isoscel, deci $BE = EC$.(1p)

Din $AD \perp BC,\ D \in (BC) \Rightarrow AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.(1p) Din

$c \cdot h_c = a \cdot h_a \Rightarrow h_c = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$, de unde $h_c = \frac{2}{5} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{6}{5} \cdot c \Rightarrow p = \frac{6}{5}$. (1p)

Problema 5. Să se determine toate triunghiurile ABC din plan pentru care există puncte M în plan astfel ca triunghiurile MAB, MBC, MCA să aibă toate aceeași arie și toate același perimetru.

prof. Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție: În planul oricărui triunghi ABC există patru puncte M cu proprietatea că ariile triunghiurilor MAB, MBC și MCA sunt egale. Unul este G (în interior) centrul de greutate și celelalte trei sunt vârfurile triunghiului $A'B'C'$ în care A' este intersecția paralelei prin C la AB cu paralela prin B la AC, B' este intersecția paralelei prin C la AB cu paralela prin A la BC și C' este intersecția paralelei prin A la BC cu paralela prin B la AC (triunghiul ABC este triunghiul median al lui $A'B'C'$).(2p)

1) Dacă $M = G$ este centru de greutate, atunci triunghiurile GAB, GBC, GCA au toate același perimetru este echivalent cu $a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c = b + \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c = c + \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \Leftrightarrow a - b = \frac{2}{3}(m_a - m_b)$ și analoagele.(1p)

Dacă $a \geq b$, atunci rezultă că $m_a \geq m_b \Leftrightarrow 4m_a^2 \geq 4m_b^2 \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 \geq 2(a^2 + c^2) - b^2 \Leftrightarrow a \leq b \Rightarrow a = b,$ analog se arată că $b = c$, deci triunghiul ABC este echilateral.(2p)

2) Dacă $M = A'$, atunci triunghiurile $A'AB$ și $A'AC$ au perimetrele egale. Deoarece $ACA'B$ este paralelogram și triunghiurile $A'AB$ și $A'BC$ au perimetrele egale rezultă $A'A = BC \Rightarrow ACA'B$ este dreptunghi $\Rightarrow AB \perp AC$. (2p)

În concluzie dacă triunghiul ABC nu este nici echilateral și nici dreptunghic atunci nu există puncte M în plan care să aibă proprietatea cerută. Dacă triunghiul ABC este echilateral atunci unicul punct M este G (centrul de greutate). Dacă triunghiul ABC este dreptunghic atunci există un unic punct M, simetricul vârfului drept față de mijlocul ipotenuzei.

Testul a fost alcătuit de prof. Gheorghe Stoianovici

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. a) 1p, b) 2p; Problema 2 a) 1p, b) 3p; Problema 3. a) 7p; Problema 4. 7p; Problema 5. 7p.