CONCURSUL INTERNAȚIONAL „MATHEMATICAL DANUBE COMPETITION”

Ediția a XIII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Problema 1

Determinaţi cea mai mică sumă a cifrelor numărului $3n^2+n+1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Problema 2

Fie n un număr natural, $n \geq 3$. În fiecare pătrăţel unitate al unei table $n \times n$ se scrie câte un număr din mulţimea $M = \{1, 2, ..., 2n-1\}$. O completare a pătratului se numeşte ,*bună* dacă, pentru fiecare număr natural *i*, $1 \leq i \leq n$, linia *i* şi coloana *i* conţin, împreună, toate numerele din *M*.

a) Arătaţi că există un număr natural $n, n \geq 3$, astfel încât să avem o completare *bună* a tablei.

b) Demonstraţi că, pentru $n = 2017$, nu există o completare *bună* a tablei.

Problema 3

Se consideră un triunghi ascuţitunghic *ABC* în care A_1, B_1, C_1 sunt picioarele înălţimilor duse din *A*, *B*, respectiv *C*, iar *H* este ortocentrul. Perpendicularele din *H* pe dreptele A_1C_1 şi A_1B_1 intersectează dreptele *AB*, respectiv *AC* în punctele *P* şi *Q*.

Demonstraţi că perpendiculara din *A* pe dreapta B_1C_1 conţine mijlocul segmentului $[PQ]$.

Problema 4

Determinaţi tripletele de numere naturale nenule (x, y, z) care verifică egalitatea $x^4 + y^4 = 2z^2$, iar numerele *x* şi *y* sunt prime între ele.

Soluţii juniori

Problema 1

Determinaţi cea mai mică sumă a cifrelor numărului $3n^2+n+1$, unde $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Soluţie*(prof. Cristian Mangra, Bucureşti)***:**
Pentru $n=8$, obţinem numărul 201 care are suma cifrelor 3.
Vom arăta că numerele de forma $3n^2+n+1$ nu pot avea suma cifrelor egală cu 1 sau cu 2.
Deoarece numerele de forma $3n^2+n+1$ sunt impare ele nu pot fi scrise ca 10^k sau $2\cdot 10^k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.
Dacă $3n^2+n+1=10^k+1$, atunci $n(3n+1)=10^k$. Deoarece $(n,3n+1)=1$, obţinem cazurile:

- $n=5^k,\ 3n+1=2^k$, evident imposibil.
- $n=2^k,\ 3n+1=5^k$, imposibil, deoarece, pentru $k=1$ obţinem $7=5$, iar, pentru $k\geq 2$ avem $5^k>4^k>3\cdot 2^k+1$.

Problema 2

Fie *n* un număr natural, $n\geq 2$. In fiecare pătrăţel unitate al unei table $n\times n$ se scrie câte un număr din mulţimea $M=\{1,2,...,2n-1\}$. O completare a pătratului se numeşte ,,bună" dacă, pentru fiecare număr natural *i*, $1\leq i\leq n$, linia *i* şi coloana *i* conţin, împreună, toate numerele din *M*.
a) Arătaţi că există un număr natural $n, n\geq 3$, astfel încât să avem o completare „bună" a tablei;
b) Demonstraţi că, pentru $n=2017$, nu există o completare „bună" a tablei.

Soluţie*(lector.dr. Andrei Eckstein, Timişoara)***:**
a) Pentru $n=4$ obţinem, de exemplu, următoarea completare „bună":

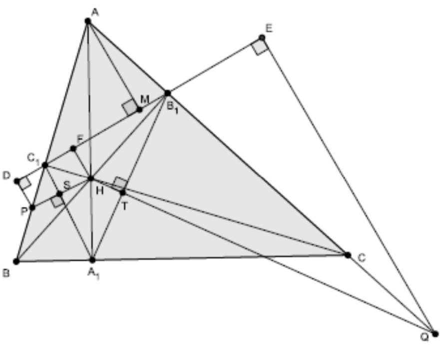
1	2	4	5
3	1	6	4
7	5	1	2
6	7	3	1

b) Vom arăta că, pentru orice *n* impar, nu există o completare „bună" a tablei.
Presupunem contrariul.
Pentru oricare $i\in\{1,2,...,n\}$, fiecare dintre numerele din mulţimea *M* apare o singură dată atât pe coloana *i*, precum şi pe coloana *i*.
Notăm cu a_{ij} numărul care apare la intersecţia liniei *i* cu coloana *j*, unde $i, j\in\{1,2,...,n\}$.
Fie $S_i=a_{i1}+a_{i2}+...+a_{in}+a_{1i}+a_{2i}+...+a_{ni}$, unde numărul a_{ii} este considerat o singură dată.
Orice număr *k* din *M* trebuie să fie termen în *n* asemenea sume. Dacă $a_{ij}=k,\ i\neq j$, atunci *k* va contribui atât la suma S_i precum şi la suma S_j . Aşadar, orice număr care nu este situat pe diagonala principală contribuie la două sume. Cum, în total, există un număr impar de sume, numărul *k* trebuie să apară la un număr impar de sume pe diagonala principală. Deci orice număr din *M* trbuie să apară pe diagonala principală. Contradicţie.

Problema 3

Se consideră un triunghi ascuţitunghic ABC în care A_1, B_1, C_1 sunt picioarele înălţimilor duse din A, B, respectiv C, iar H este ortocentrul. Perpendicularele din H pe dreptele A_1C_1 şi A_1B_1 intersectează dreptele AB, respectiv AC în punctele P şi Q.
Demonstraţi că perpendiculara din A pe dreapta B_1C_1 conţine mijlocul segmentului $[PQ]$.

Soluţie 1 *(prof. Cristian Mangra, Bucureşti)***:**



Punctul H este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$, iar punctul A este centrul cercului exînscris al aceluiaşi triunghi, corespunzător laturii $\left[B_1C_1\right]$. Fie $PD \perp B_1C_1, D \in B_1C_1, \{S\} = HP \cap A_1C_1, HF \perp B_1C_1, F \in B_1C_1$

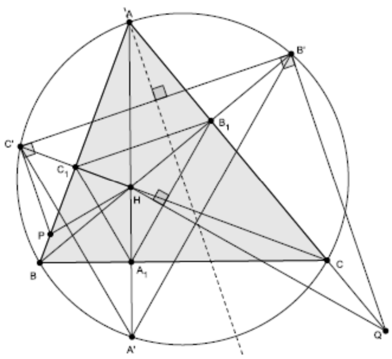
Deducem că $DC_1 = SC_1 = C_1F$. (1)

Analog, dacă $QE \perp B_1C_1, E \in B_1C_1, \{T\} = HQ \cap A_1B_1$, atunci $EB_1 = TB_1 = B_1F$. (2)

Dacă $AM \perp B_1C_1, M \in B_1C_1$, perechile de puncte (F, M), (C_1, B_1) sunt izotomic conjugate, adică $FC_1 = MB_1$. (3)

Din (1), (2) şi (3) deducem că punctul M este mijlocul segmentului $[DE]$, deci AM este mediatoarea segmentului $[DE]$ şi, în trapezul dreptunghic $DEQP$, va tăia latura $[PQ]$ în mijloc.

Soluţie 2 *(prof. Mircea Fianu, Bucureşti)***:**



Fie A', B', C' simetricele punctului H faţă de dreptele BC, AC şi respectiv AB. Atunci triunghiul $A'B'C'$ este omoteticul triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu H şi are acelaşi cerc circumscris ca şi triunghiul ABC. Deasemenea, $A'H, B'H, C'H$ sunt şi bisectoarele triunghiului $A'B'C'$. Cum triunghiul QHB' este isoscel cu $QH = QB'$, avem $m\left(\widehat{HB'Q}\right) = m\left(\widehat{QHB'}\right)$.

Prin urmare, avem :

$$m\left(\widehat{C'B'Q}\right) = m\left(\widehat{HB'Q}\right) + m\left(\widehat{C'B'H}\right) = m\left(\widehat{QHB_1}\right) + m\left(\widehat{C_1B_1H}\right) = m\left(\widehat{QHB_1}\right) + m\left(\widehat{HB_1A_1}\right) = 90^\circ$$

Analog, obţinem $m\left(\widehat{B'C'P}\right) = 90^\circ$.

Deoarece $AB' = AC'$, perpendiculara din A pe B_1C_1 va fi mediatoarea segmentului $[B'C']$, deci paralelă cu QB' şi cu PC' deci va tăia latura PQ a trapezului $B'C'PQ$ la mijloc.

Problema 4

Determinaţi tripletele de numere naturale nenule (x, y, z) care verifică egalitatea $x^4 + y^4 = 2z^2$, iar numerele x şi y sunt prime între ele.

Soluţie_(prof. Lucian Petrescu, Tulcea)_**:**

Observăm că numerele x şi y sunt impare.
Deducem că şi z este impar şi este prim cu numărul xy .

Egalitatea din enunţ se transformă succesiv în $x^8+2x^4y^4+y^8=4z^4$, echivalentă cu $\left(x^4-y^4\right)^2=4z^4-4x^4y^4$, sau $z^4-(xy)^4=\left(\dfrac{x^4-y^4}{2}\right)^2$.

Arătăm că egalitatea $a^4-b^4=c^2$ (*) , unde $c\in\mathbb{N}$, numerele naturale a şi b sunt impare, iar $(a,b)=1$, are loc numai dacă $c=0$.

Presupunem că $c\neq 0$ şi fie (a_0,b_0,c_0) o soluţie a ecuaţiei (*) cu a_0 minim.

Din $a_0^4-b_0^4=c_0^2$, deducem că există numerele naturale $m>n>0$, de parităţi diferite, astfel încât $a_0^2=m^2+n^2$, $b_0^2=m^2-n^2$, $c=2mn$. Prin urmare, $m^4-n^4=(ab)^2$, adică tripletul (m,n,ab) este încă o soluţie pentru (*). Dar, cum $a_0>m$, obţinem contradicţie cu minimalitatea lui a_0. Rezultă că $c=0$.

Deducem că $x=y$ şi, cum $(x,y)=1$, obţinem $(x,y,z)=(1,1,1)$.