CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Clasa a VIII–a

Problema 1. Dacă x, y, z sunt numere reale mai mari decât zero, atunci demonstrează că:

$$\begin{cases} \dfrac{2y+z}{4x+y+z} \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+z}{2x+3y+z} \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+y}{2x+2y+2z} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ dacă și numai dacă } x = y = z.$$

Problema 2. Dacă a, b, x, y sunt numere reale pentru care sunt adevărate, simultan, egalitățile: $ax + by = 5$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 11$ și $ax^4 + by^4 = 19$, atunci determină numărul $ax^5 + by^5$.

Problema 3. Fie un triunghi ABC, D este mijlocul laturii BC, M un punct pe latura AC și N mijlocul lui BM. Dacă $AN \cap BC = \{Q\}$ și $AD \cap BM = \{P\}$, atunci arată că $PQ \parallel AB$.

Problema 4. Fie P un poligon convex cu 2017 laturi, p perimetrul său și d suma diagonalelor sale. Arată că $d > 1007p$.

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. 7p; Problema 2. 7p; Problema 3. 7p; Problema 4. 7p.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXII - a, Călărași, 28 octombrie 2017

Clasa a VIII–a

Problema 1. Dacă x, y, z sunt numere reale mai mari decât zero, atunci demonstrează că:

$$\begin{cases} \dfrac{2y+z}{4x+y+z} \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+z}{2x+3y+z} \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+y}{2x+2y+2z} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ dacă și numai dacă } x=y=z.$$

prof. Cristina Bornea, Călărași

Soluție : $(\leftarrow)$ Dacă $x=y=z$ cele trei inegalități din sistem sunt echivalente cu $\frac{3}{6} \le \frac{1}{2}$, ceea ce este adevărat.(**1p**)

$(\rightarrow)$ Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} 4y+2z \le 4x+y+z \\ 4x+2z \le 2x+3y+z \\ 4x+2y \le 2x+2y+2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+3z \le 4x+3y+2z \ (1) \\ 6x+3z \le 4x+3y+2z \ (2) \\ 6x+3y \le 4x+3y+2z \ (3) \end{cases}$ **(1p)**

Fie $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ o soluție a sistemului. Dacă presupunem că cel puțin două dintre numerele x_0, y_0, z_0 sunt diferite, atunci rezultă (α): $\begin{cases} x_0 \le y_0 \\ x_0 < z_0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_0 < y_0 \\ x_0 \le z_0 \end{cases}$ sau (β): $\begin{cases} y_0 \le x_0 \\ y_0 < z_0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} y_0 < x_0 \\ y_0 \le z_0 \end{cases}$ sau (δ): $\begin{cases} z_0 \le x_0 \\ z_0 < y_0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} z_0 < x_0 \\ z_0 \le y_0 \end{cases}$. (2p)

$(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 \le 3y_0 \\ x_0 < z_0 \end{cases} \Rightarrow 4x_0 < 3y_0 + z_0 \Leftrightarrow 4x_0 + 3y_0 + 2z_0 < 6y_0 + 3z_0 \xrightarrow{(1)} 6y_0 + 3z_0 < 6y_0 + 3z_0$, contradicție. La aceeași concluzie se ajunge în cazurile (β) și (δ). În concluzie, dacă $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ este o soluție a sistemului atunci $x_0 = y_0 = z_0$ **(3p)**

Problema 2. Dacă a, b, x, y sunt numere reale pentru care sunt adevărate, simultan, egalitățile: $ax+by=5$, $ax^2+by^2=7$, $ax^3+by^3=11$ și $ax^4+by^4=19$, atunci determină numărul ax^5+by^5.

prof. Vasile Pop, Cluj

Soluție : $(ax^3+by^3)(x+y)=11(x+y) \Leftrightarrow ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)=11(x+y) \Leftrightarrow 19+7xy=11(x+y)(1)$

$(ax^2+by^2)(x+y)=7(x+y) \Leftrightarrow ax^3+by^3+xy(ax+by)=7(x+y) \Leftrightarrow 11+5xy=7(x+y)(2)$

Din (1) și (2) rezultă $x+y=3$ și $xy=2$. **(4p)**

$(ax^4+by^4)(x+y)=19(x+y) \Leftrightarrow ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)=19(x+y) \Leftrightarrow ax^5+by^5=19(x+y)-11xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax^5+by^5=35$. (**3p**)

Problema 3. Fie un triunghi ABC, D este mijlocul laturii BC, M un punct pe latura AC și N mijlocul lui BM. Dacă $AN \cap BC = \{Q\}$ și $AD \cap BM = \{P\}$, atunci arată că $PQ \parallel AB$.

Soluţie:

ND este linie mijlocie în Δ MBC,(**1p**)

deci ND ∥ AC şi din teorema Thales rezultă :

$\frac{NQ}{NA} = \frac{QD}{DC} = \frac{QD}{BD}$ **(2p)**

Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔAQD cu transversala B,N,P şi obţinem :

$$\frac{BQ}{BD} \cdot \frac{NA}{NQ} \cdot \frac{PD}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{BQ}{BD} \cdot \frac{NA}{NQ} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{PA}{PD} = \frac{BQ}{BD} \cdot \frac{BD}{QD} = \frac{BQ}{QD} \ (\mathbf{2p})$$

astfel că avem $\frac{PA}{PD} = \frac{BQ}{QD}$ şi din reciproca Thales rezultă $PQ \parallel AB$. (**2p**)

Problema 4. Fie P un poligon convex cu 2017 laturi, p perimetrul său și d suma diagonalelor sale. Arată că $d > 1007p$.

prof. Vasile Pop, Cluj

Soluție:

Vom rezolva problema pentru un poligon cu $n \geq 3$ laturi și $N = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonale

Notăm vârfurile poligonului $A_1, A_2, ..., A_n$ $(A_k = A_{n+k})$ și considerăm

diagonalele $A_p A_k$ și $A_{p+1}A_{k+1}$ care se intersectează în punctul B.

Aplicam inegalitatea triunghiului în triunghiurile $A_p BA_{p+1}$ și $A_k BA_{k+1}$ și avem:

$BA_P + BA_{P+1} > A_P A_{P+1,}$ $BA_k + BA_{k+1} > A_k A_{k+1}$.(**5p**)

Adunând aceste inegalităţi, obţinem: $A_p A_k + A_{p+1}A_{k+1} > A_p A_{p+1} + A_k A_{k+1}$.

Dacă adunăm aceste inegalităţi după toate diagonalele $D_{p,q} = A_p A_q$,

fiecare diagonală se adună de două ori și fiecare latură se adună de $(n-3)$ ori,

astfel că rezultă inegalitatea $2d > (n-3)p.$

În cazul $n = 2017$ rezultă $2d > 2014p \Leftrightarrow d > 1007p.$ (**3p**)

Succes!

Barem de corectare: Problema 1. 7p; Problema 2. 7p; Problema 3. 7p; Problema 4. 7p.