CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XXI - a, Călărași, 29 octombrie 2016

Clasa a VIII–a

P1. Un număr natural se numește $n-consecutiv$ dacă poate fi scris ca suma a n numere consecutive.

a) Câte dintre elementele mulțimii $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2016\}$ sunt simultan $11-consecutiv$ și $19-consecutiv$?

b) Câte dintre elementele mulțimii $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2016\}$ sunt simultan $10-consecutiv$ și $20-consecutiv$?

Aurelia Cațaros, Călărași

Soluție: **a)** $(k-5)+(k-4)+\ldots(k-1)+k+(k+1)+\ldots+(k+4)+(k+5)=11k,\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\geq 6\Rightarrow$ un număr este $11-consecutiv$ dacă și numai dacă este divizibil cu 11; asemănător un număr este $19-consecutiv$ dacă și numai dacă este divizibil cu 19; elementele mulțimii $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2016\}$ sunt simultan $11-consecutiv$ și $19-consecutiv$ sunt numerele care sunt divizibile cu $11\cdot 19=209$, $\{209,\ 418,\ \ldots,\ 9\cdot 209=1881\}$; (2p) **b)** $k+(k+1)+\ldots(k+9)=10k+45,\ \ \forall k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dacă un număr este $10-consecutiv$, atunci el este impar (1); $k+(k+1)+\ldots+(k+19)=20k+190,\ \forall k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dacă un număr este $20-consecutiv$, atunci el este par (2); din (1) și (2) rezultă că nu există numere $10-consecutiv$ și $20-consecutiv$. (1p)

P2. Fie mulțimea $M=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2016\}$, arată că există două mulțimi A și B cu proprietățile:

i. $A\cup B=M$;

ii. $A\cap B=\phi$;

iii. suma pătratelor elementelor mulțimii A este egală cu suma pătratelor elementelor mulțimii B.

Relu Ciupea, Călărași

Soluție: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2=n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2\Leftrightarrow 4n+20=4n+20,$ (3p) adevărat $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $A=\{n+1,\ n+2,\ n+4,\ n+7\,|\,n\in\{1,\ 9,\ 17,\ \ldots,\ 2009\}\}$ și

$B=\{n,\ n+3,\ n+5,\ n+6\,|\,n\in\{1,\ 9,\ 17,\ \ldots,\ 2009\}\}$. (1p)

P3. Să de arate că există o infinitate de multipli ai numărului 2017 care încep cu 2016 și se termină cu 2016 (*numerele sunt scrise în baza 10*).

Vasile Pop, Cluj Napoca

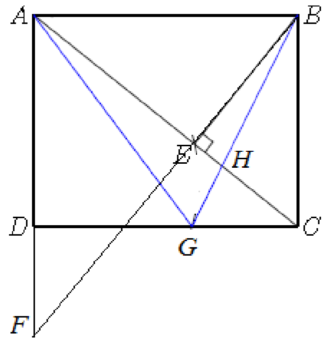
Soluție: 1. din teorema împărțirii cu rest există c și r numere naturale $r<2017$, astfel încât $2016\cdot 10^4=2017\cdot c+r$; numărul $A=2016\cdot 10^4+(2017-r)$ este divizibil cu 2017 și începe cu 2016; (3p)

2. numerele 2017 și 10^4 sunt relativ prime; există $a,\ b\in\mathbb{N}$ asfel încât $a\cdot 2017-b\cdot 10^4=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(2016a)\cdot 2017-(2016b)\cdot 10^4=2016\Leftrightarrow(2016b)\cdot 10^4+2016=(2016a)\cdot 2017$; numărul $B=(2016b)\cdot 10^4+2016$ este multiplu al lui 2017 și care se termină cu 2016; (3p)

3. $\forall k\in\mathbb{N},$ cu proprietatea $10^k>B\Rightarrow N=A\cdot 10^k+B$ este un număr cu proprietatea cerută. (1p)

P4. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB > BC,\ BE \perp AC,\ E \in (AC), G \in (DC)$ și $BE \cap AD = \{F\}$. Dacă $(GB$ este bisectoarea unghiului $\angle AGC,$ atunci demonstrați că $AG \perp FG.$

Viorica Stoianovici, Călărași



Soluție: $m(\angle AGB) = m(\angle ABG) \Rightarrow AB = AG, (1);$ (2p)

$BE \perp AC \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AC, (2);\ \Delta AEF \sim \Delta ADC \Rightarrow$ (2p)

$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AD \cdot AF, (3);$ din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ (1p)

$\Rightarrow AG^2 = AB^2 = AE \cdot AC = AD \cdot AF \Rightarrow AG \perp FG.$ (2p)

P5. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu diagonalele congruente. Dacă P și Q sunt mijloacele laturilor AD și BC, $AC \cap BD = \{O\}$ și $O \notin PQ$, $PQ \cap BD = \{X\}$, $PQ \cap AC = \{Y\}$. Demonstrați că triunghiul OXY este echilateral dacă și numai dacă $AO = 2PX$.

Gheorghe Stoianovici

Soluție: $(\rightarrow)$ Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul APY pentru transversala $D,\ O,\ X$ rezultă:

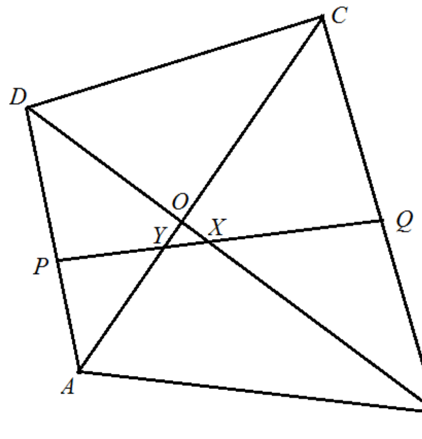
$\frac{DP}{DA} \cdot \frac{OA}{OY} \cdot \frac{XY}{XP} = 1 (1) \Leftrightarrow AO = 2PX$ (2p)

$(\leftarrow)$ Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AOD pentru transversala $P,\ Y,\ X$ rezultă:

$\frac{XO}{XD} \cdot \frac{PD}{PA} \cdot \frac{YA}{YO} = 1 \Leftrightarrow \frac{XO}{YO} = \frac{XD}{YA}$ (2) (2p)

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul BOC pentru transversala $Q,\ X,\ Y$ rezultă:

$\frac{YO}{YC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{XB}{XO} = 1 \Leftrightarrow \frac{XO}{YO} = \frac{XB}{YC}$ (3) (1p)



Din (2) și (3) rezultă

$\frac{XB}{YC} = \frac{XD}{YA} \Leftrightarrow \frac{XB}{BD} = \frac{YC}{AC} \Leftrightarrow \frac{XB}{YC} = 1 \Leftrightarrow OX = OY$ (4) (1p)

$(1) \Leftrightarrow OY = XY$ (5) (1p)

Din (4) și (5) rezultă că triunghiul OXY este echilateral.

Succes